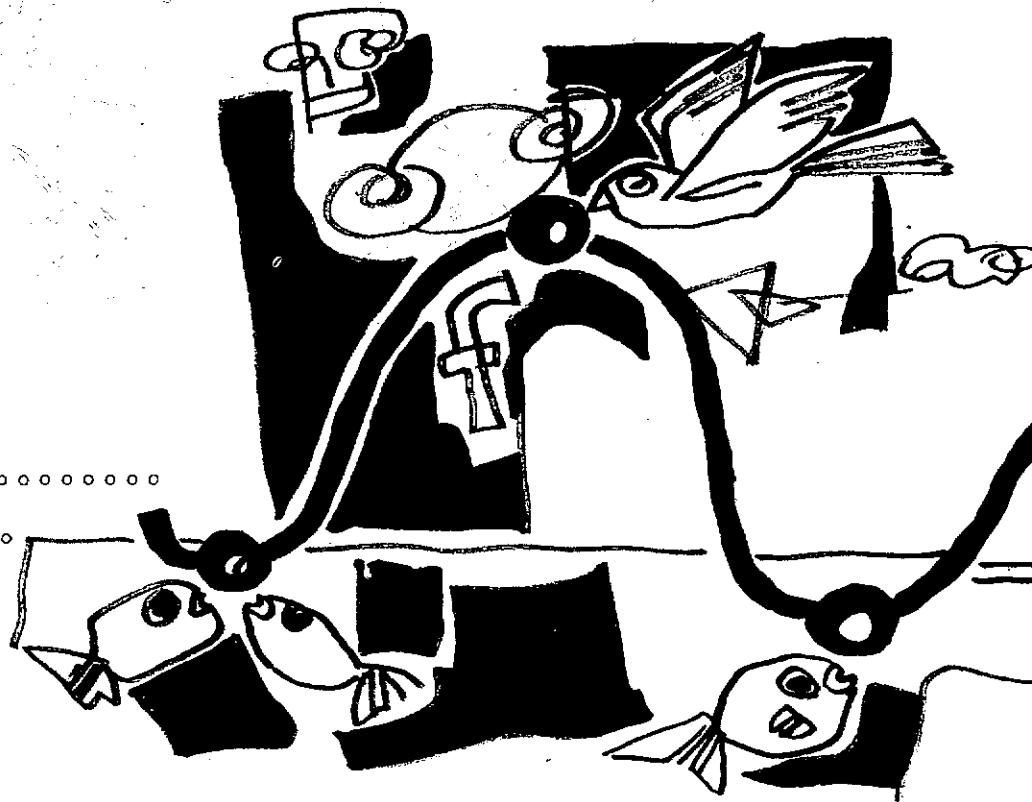


روش تعیین عرضهای اکستریم نسبی تابع f بدون استفاده از مشتق

(برای دانش آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی)

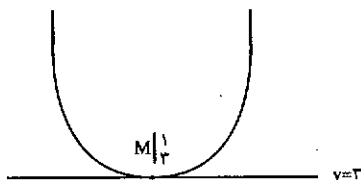
.....
احمد قندهاری
.....



که خط $y = 3$ بر منحنی تابع مماس است:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$



توجه داریم که اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد، چنانچه معادله‌های آنها را با هم تقاطع دهیم (y ها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشه برابر داشته باشد یا دلتای معادله حاصل برابر ۰ باشد.

تابع به معادله $y = x^2 - 2x + 4$ را در نظر می‌گیریم.
می‌خواهیم عرض می‌نی‌مم نسبی این تابع را ابتدا به کمک مشتق محاسبه کنیم. می‌نویسیم:
طول می‌نی‌مم نسبی تابع

$$y' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

در معادله تابع

$$x = 1 \longrightarrow y = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow y = 3$$

عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

پس نقطه $M(1, 3)$ می‌نی‌مم نسبی تابع است.

چون عرض می‌نی‌مم نسبی (۳) است، حال نشان می‌دهیم

(توجه داریم که ریشه‌های ساده مشتق، طولهای اکسترم نسبی تابع است.)

$$\text{در معادله تابع} \quad x=1 \longrightarrow y=\frac{2}{2}=1$$

عرض ماکزیمم نسبی تابع

$$\text{در معادله تابع} \quad x=\longrightarrow y=\frac{-2}{2}=-1$$

عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

■ روش دوم بدون استفاده از مشتق: به جای این که فرض کنیم $y=k$ عرض اکسترمم نسبی تابع است، فرض می‌کنیم $y=y$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد. (در واقع معادله تابع را طرفین وسطین می‌کنیم و بر حسب x مرتب می‌نویسیم.)

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 + y = 2x \\ y = y \end{cases}$$

$$yx^2 - 2x + y = 0; \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4 - 4y^2 = 0$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad \text{عرضهای اکسترمم نسبی تابع}$$

تذکر: چون منحنی این تابع مجانب قائم ندارد، عرض ماکزیمم نسبی بزرگتر از عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است؛ پس $y=1$ عرض ماکزیمم نسبی و $y=-1$ عرض می‌نی‌مم نسبی است.

توجه: عملاً در مسائل به جای این که خط $y=k$ یا خط $y=y$ را با معادله منحنی تقاطع دهیم، یکباره معادله تابع را بر حسب x مرتب می‌نویسیم. (در مسائل کسری ابتدا معادله تابع را طرفین وسطین می‌کنیم.)

$$y = \frac{x^2+1}{x} \quad \text{مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادله}$$

را بیابید.

از روش مورد بحث (بدون استفاده از مشتق استفاده می‌کنیم):

حال فرض می‌کنیم $y=k$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع باشد، پس اگر خط $y=k$ را با معادله منحنی تقاطع دهیم (y ها حذف)، دلتای معادله تقاطع حاصل باید برابر ۰ باشد.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + (4-k) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4-k) = 0 \Rightarrow 1 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 3$$

پس عرض می‌نی‌مم نسبی منحنی تابع برابر (۳) است. حال عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را بدون استفاده از مشتق به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = k \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $y=k$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد.

$$ax^2 + bx + c - k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a(c-k) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac + 4ak = 0$$

$$4ak = 4ac - b^2 \Rightarrow k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

پس عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادله

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{برابر} \quad \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{است.}$$

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادله

$$y = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{را به دو روش بیابید.}$$

■ روش اول با استفاده از مشتق:

$$y' = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

طولهای اکسترمم نسبی تابع

$$y' = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$(a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + (c - c'y) = 0$$

$$\Delta = (b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) = 0 \Rightarrow$$

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2a'c - bb')y + b^2 - 4ac = 0$$

ریشه‌های این معادله، عرضهای اکسترم نسبی تابع f است. فرض می‌کنیم ریشه‌های این معادله y_1 و y_2 باشد.

$$y_1, y_2 = \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{b'^2 - 4a'c'} = \frac{f}{\Delta \text{ مخرج تابع}}$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2(2ac' + 2a'c - bb')}{b'^2 - 4a'c'}$$

مثال: در تابع به معادله $y = \frac{x^2 - 4x + m}{x - \frac{m}{4}}$ مجموع

عرضهای اکسترم نسبی تابع برابر (-4) است، m را بیابید.
حل: توجه $a' = 0$

$$y_1 + y_2 = \frac{-2(2ac' + 2a'c - bb')}{b'^2 - 4a'c'}$$

$$-4 = \frac{-2(-\frac{m}{4} + 0 + 4)}{1} \Rightarrow \frac{-m}{2} + 4 = 2 \Rightarrow m = 4$$

مثال: در تابع به معادله $y = \frac{x-1}{x^2 + mx}$ ، اگر حاصلضرب عرضهای اکسترم نسبی برابر $\frac{1}{4}$ باشد، m را بیابید.

حل:

$$y_1, y_2 = \frac{b^2 - 4ac}{b'^2 - 4a'c'} = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

مسئله: تابع به معادله $y = \frac{x^2 + 4ax + 1^2}{x^2 - ax - 3}$ مفروض است. ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر a یکی از مقادیر اکسترم

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow x^2 + 1 = yx \rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

چون $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است؛ یعنی منحنی تابع مجانب قائم دارد، پس عرض می‌نی‌مم نسبی تابع بزرگتر از عرض ماکزیم نسبی تابع است.

بنابراین $y = -2$ عرض ماکزیم نسبی تابع و $y = 2$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

خلاصه برای تعیین عرضهای اکسترم نسبی تابع، معادله تابع را بر حسب x مرتب می‌نویسیم، سپس $\Delta = 0$ ، از حل معادله $\Delta = 0$ عرضهای اکسترم نسبی تابع به دست می‌آید. مثال: عرضهای اکسترم نسبی تابع به معادله

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4}$$

حل: معادله تابع را بر حسب x مرتب می‌نویسیم:

$$y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow yx^2 - 5yx + 4y = x$$

$$yx^2 - (5y+1)x + 4y = 0, \Delta = (5y+1)^2 - 16y^2 = 0$$

$$9y^2 + 10y + 1 = 0 \quad a+c=b; \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

چون منحنی این تابع مجانب قائم دارد، $y = -1$ عرض ماکزیم نسبی و $y = -\frac{1}{9}$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

تابع به معادله $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ (حدأقل a یا a' مخالف است)، می‌خواهیم عرضهای اکسترم نسبی این تابع را بیابیم:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a'yx^2 + b'yx + c'y$$

معادله مرتب شده بر حسب x

نسبی تابع مقدار ثابتی است. همچنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکستریم نسبی تابع برابر $-\frac{1}{4}$ باشد.

حل:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{100m^2}{m^2+8} = \frac{100}{9}$$

$$9m^2 = m^2 + 8 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

تمرین: بدون استفاده از مشتق عرضهای اکستریم نسبی، هریک از تابعهای به معادله زیر را بیابید.

$$1) y = \frac{x^2 + 5}{x}$$

$$2) y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

تمرین: در تابع به معادله $y = \frac{x}{x^2 - 5x + m}$ ، اگر

حاصلضرب عرضهای اکستریم نسبی تابع برابر $\frac{1}{9}$ باشد، m را بیابید.

تمرین: در تابع به معادله $y = \frac{x-2a}{x^2-a}$ ، $(a \neq 0)$ تحقیق کنید، حاصل جمع اکستریمهای نسبی تابع مقدار ثابت 2 است.

$$y = \frac{x^2 + 4ax + 12}{x^2 - ax - 3}$$

$$yx^2 - axy - 3y = x^2 + 4ax + 12$$

$$(y-1)x^2 - a(4+y)x - 3(y+4) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2(4+y)^2 + 12(y-1)(y+4) = 0$$

$$(y+4)(a^2(4+y) + 12(y-1)) = 0$$

$$y+4=0 \Rightarrow y=-4$$

یکی از مقادیر اکستریم نسبی که مقدار ثابتی است.

$$a^2(4+y) + 12(y-1) = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}; a^2(4-\frac{1}{4}) + 12(-\frac{1}{4}-1) = 0 \Rightarrow 15a^2 = 5(12)$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

مسئله: تابع به معادله $y = \frac{x+2m}{x^2-mx-2}$ مفروض است.

m را چنان بیابید تا عرض میانی مم نسبی تابع 9 برابر عرض ماکزیم نسبی تابع باشد.

حل:

$$y = \frac{x+2m}{x^2-mx-2} \Rightarrow yx^2 - myx - 2y = x + 2m$$

$$yx^2 - (my+1)x - (2y+2m) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (my+1)^2 + 4y(2y+2m) = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(m^2+8)}_a y^2 + \underbrace{4m}_b y + \underbrace{1}_c = 0 \quad (I)$$

تذکر مهم: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ،

