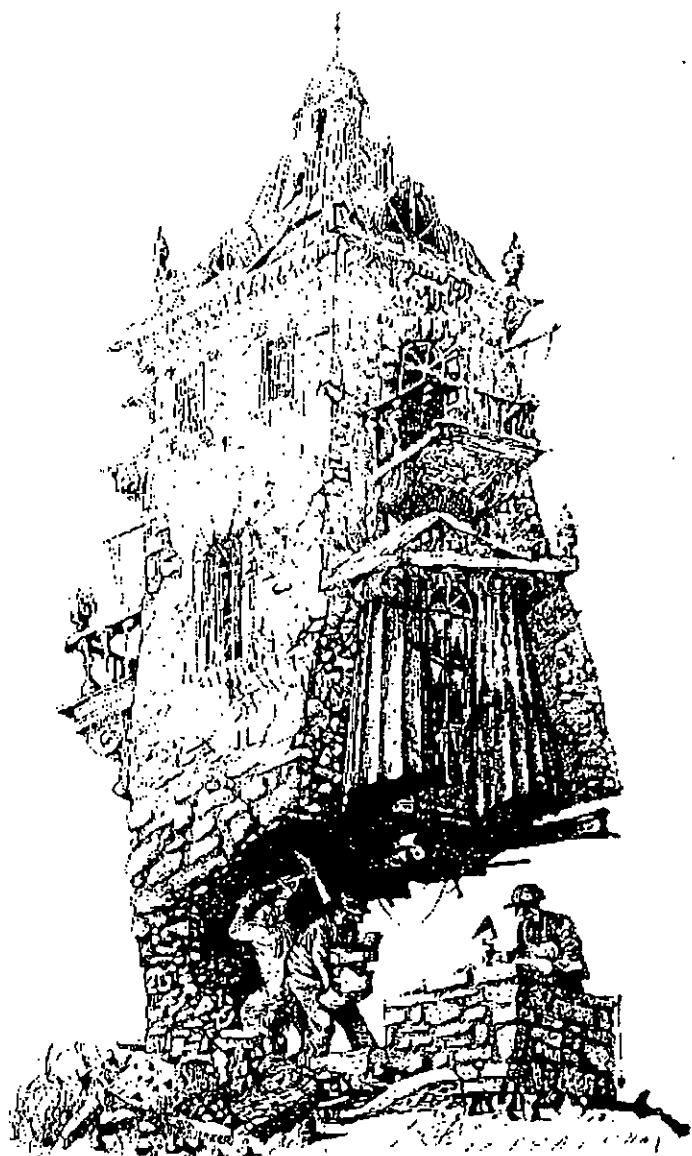




● عبدالحسین مصحفی

روش از سرگیری (= روش تکرار)*

و کاربرد آن در
به دست آوردن
اندازه تقریبی ریشه یک معادله

۲۲ رقم پس از ممیز به دست آورده است.**

دنباله تقریبهای یک عدد حقیقی

در ریاضیات کاربردی، زیاد پیش می آید که باید عددی حقیقی را در یک محاسبه به کار برد، در حالی که دسترسی به اندازه واقعی آن عدد ممکن نیست؛ مثلاً عددی گنگ غیر جبری یا ریشه معادله ای حل نشدنی باشد. در چنین فرایندهایی، به جای اندازه واقعی عدد، اندازه تقریبی آن را به کار می برند. برای به دست آوردن اندازه تقریبی چنین عددهایی، روشهای گوناگونی هم نشان داده شده است. در این روشها، اگر بنا باشد اندازه تقریبی عدد حقیقی α به دست آید، دنباله ای همگرا از عددهای حقیقی μ_n و از گونه

$$(\mu_n) = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots$$

چنان تشکیل می شود که جمله هایش بترتیب، به اندازه واقعی α نزدیکتر شوند و سرانجام حد آن، همان اندازه واقعی α باشد. این دنباله را دنباله تقریبهای عدد α ، و در حالتی که α ریشه معادله

امروزه «روش از سرگیری» یک ابزار نرم افزاری بسیار کارآمد در الگوریتمهای کامپیوتری است و در برنامه نویسیها برای کامپیوتر، کاربرد بسیار گسترده دارد. در رابطه ها و معادله های ماتریسی نیز به کار می رود. اما پیش از اینها، کاربرد روش از سرگیری در به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه معادله ها بوده است؛ معادله هایی که با روشهای شناخته شده حل نمی شده اند. با روی کار آمدن ماشینهای حساب و کامپیوترها، این کاربرد روش از سرگیری نیز گسترش یافته است. از دیدگاه تاریخی، غیاث الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان بزرگ ایرانی سده نهم هجری، نخستین کسی به شمار می آید که روش از سرگیری را برای حل معادله درجه سوم به کار برده است. او در اثر خود به نام «رساله در جیب و وتر» از راه به کار بردن روش از سرگیری، اندازه تقریبی ریشه معادله ای را که اکنون به صورت

$$3x - x^3 = 0.10467191\dots$$

نوشته می شود و از روی آن، مقدار سینوس زاویه یک درجه را تا

می‌برند. در روش از سرگیری، معادله داده شده $f(x)=0$ به معادله $x=g(x)$ تبدیل می‌شود. این معادله، رابطه‌ای است که در آن، متغیر x تابع تغییرهای خودش است و برای هر مقدار آغازی x_0 که به جای x گذاشته شود، یک دنباله

$$(x_n) = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots$$

را به دست می‌دهد که جمله‌هایش بترتیب برابرند با:

$$x_1 = g(x_0),$$

$$x_2 = g(x_1),$$

$$x_3 = g(x_2),$$

⋮

$$x_k = g(x_{k-1})$$

⋮

بنا بر مقدار x_0 و بنا بر ساختار $g(x)$ ، دنباله (x_n) ممکن است همگرا، واگرا یا تکرار جمله ثابت باشد. حالت اخیر، هنگامی است که مقدار x_0 ریشه معادله $f(x)=0$ باشد.

مثال ۱: معادله $2x-1=0$ را اگر به صورت $x=3x-1$ بنویسیم، در این صورت، بجای $0/5$ که جواب معادله است، هر عدد دیگر را مقدار آغازی x_0 بگیریم، دنباله‌ای واگرا به دست می‌آید. با مقدار آغازی $x_0=1$ داریم:

$$x_1 = 3 \times 1 - 1 = 2, \quad x_2 = 3 \times 2 - 1 = 5,$$

$$x_3 = 3 \times 5 - 1 = 14, \dots$$

و با دنبال کردن عمل، دنباله زیر را خواهیم داشت که صعودی و واگراست:

$$(x_n) = 1, 2, 5, 14, 41, 122, \dots$$

هر عدد دیگر را هم مقدار آغازی بگیریم، باز دنباله‌ای واگرا به دست می‌آید. چنان که:

$$x_0 = 0 \Rightarrow (x_n) = 0, -1, -4, -13, -40, \dots$$

$$x_0 = -0/7 \Rightarrow (x_n) = -0/7, -3/1, -10/3, \dots$$

در حالت $x_0 = 0/5$ دنباله‌ای با تکرار همین جمله به دست می‌آید:

$$x_0 = 0/5 \Rightarrow (x_n) = 0/5, 0/5, 0/5, \dots$$

مثال ۲: همان معادله $2x-1=0$ را اگر به صورت

$$x = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

بنویسیم، با انتخاب $x_0=1$ ، دنباله

داده شده $f(x)=0$ باشد، دنباله تقریبهای ریشه معادله $f(x)=0$ می‌نامند.

در دنباله تقریبهای α ، نظیر هر عدد کوچک و داده شده ε ، جمله‌ای مانند μ_k وجود خواهد داشت که:

$$|\alpha - \mu_k| < \varepsilon$$

عدد μ_k با این شرط را اندازه تقریبی α با تقریب کمتر از ε می‌نامند. هرگاه در دنباله همگرای (μ_n) ، هرچه باشد عدد طبیعی n داشته باشیم:

$$|\mu_{k+n} - \mu_k| < \varepsilon, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

حد μ_{k+n} نیز همان حد دنباله و برابر با α است و نتیجه می‌شود:

$$|\alpha - \mu_k| < \varepsilon$$

از این رو، اگر در به دست آوردن جمله‌های یک دنباله همگرای (μ_n) به جمله‌ای برسیم که تفاوت آن با جمله بعد و با جمله‌های پس از آن، کوچکتر از ε باشد، آن جمله، مقدار تقریبی α با تقریب کمتر از ε خواهد بود. برای نمونه، در دنباله

$$1/2, 1/25, 1/259, 1/2599, 1/25992,$$

$$1/259921, \dots$$

که یک دنباله تقریبهای ریشه معادله $x^3-2=0$ است، می‌بینیم که جمله‌های از پنجم به بعد همه با جمله چهارم تا چهار رقم پس از ممیز مشترکند؛ یعنی تفاوت جمله چهارم با هر یک از جمله‌های پس از خودش، از $0/0001$ کوچکتر است. بنابراین، عدد $1/2599$ اندازه تقریبی ریشه سوم ۲ با تقریب کمتر $0/0001$ است.

دنباله تقریبهای هر عدد حقیقی α یکتا نیست؛ بنابر فرایندی که برای پدید آوردن دنباله می‌توان به کار برد و بنابر انتخاب جمله یکم μ_1 ، برای هر عدد α ، دنباله‌های زیادی را می‌توان تشکیل داد. از بین این دنباله‌ها و از آنها که همگرا باشند، آن را باید برگزید که شتاب همگرایی آن بیشتر و نظیر هر ε ، محاسبه تعداد کمتری از جمله‌ها لازم باشد. به این نکته هم باید توجه داشت که یک دنباله با قانون معین هم ممکن است تنها آن‌گاه همگرا باشد که جمله یکم μ_1 از آن بیرون از فاصله معینی انتخاب نشده باشد.

متغیر تابع تغییرهای خودش

روشهایی گوناگون را که برای به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه یک معادله $f(x)=0$ می‌توان به کار برد، تفاوتشان در چگونگی فرایندی است که هر کدام برای پدید آوردن دنباله تقریبها به کار

به دنباله‌ای متناوب از دو جمله ثابت می‌انجامد و کارساز نیست.

انتخاب مقدار آغازی x_0

گام نخست که برداشته شد و رابطه $x = g(x)$ به صورت اثربخش به دست آمد، گام بعدی، انتخاب مقدار آغازی x_0 است. مقدار x_0 باید در فاصله‌ای باشد که قدر مطلق مشتق کوچکتر از یک است و در این فاصله هم، هر چه به اندازه واقعی x نزدیکتر باشد، اندازه خواسته شده، زودتر به دست می‌آید. برای انتخاب بهینه مقدار x_0 ، روش معینی را نمی‌توان نام برد، می‌توان دو یا سه مقدار را آزمایش کرد و دریافت که جمله‌های دنباله نظیر، کدام یک از آنها به هم نزدیکترند و همان را به کار برد.

روش از سرگیری، سریعترین روشهای محاسبه اندازه تقریبی ریشه یک معادله به شمار می‌آید. اما هم تشکیل معادله $x = g(x)$ و هم انتخاب مقدار آغازی x_0 ، به ذوق و سلیقه شخص و به ورزیدگی و مهارت او بستگی دارد.

برنامه کامپیوتری روش از سرگیری

یک امتیاز دیگر روش از سرگیری، سادگی و کوتاهی برنامه کامپیوتری آن است. این برنامه، بیش از چند دستور عمل ندارد و می‌توان آن را به هر زبان برنامه نویسی برگرداند و روی هرگونه کامپیوتر اجرا کرد. دستور عملهای این برنامه چنین هستند:

۱- معرفی تابع $g(x)$.

۲- دستور جایگزینی $a = x_0$.

۳- محاسبه $x = g(a)$.

۴- بررسی شرط $x - a < \varepsilon$.

در صورت برقرار نبودن شرط ۴، جایگزینی $a = x$ و برگشت به دستور ۳. در صورت برقرار شدن شرط ۴، نمودن مقدار x و پایان برنامه.

چند مسأله نمونه

۱- معادله کاشانی: پیش از این یادآوری شد که کاشانی برای به دست آوردن اندازه سینوس یک درجه، محاسبه‌هایی را انجام می‌دهد و سرانجام با معادله درجه سوم زیر روبه‌رو می‌شود:

$$3x - x^3 = 0.104719$$

کاشانی استدلال می‌کند که چون مقدار x خیلی کوچک است،

مثال ۳: به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه دوم یک عدد حقیقی و مثبت R ، هم‌ارز است با به دست آوردن اندازه تقریبی ریشه معادله

$$x^2 = R$$

و این معادله را به صورتهای گوناگون می‌توانیم به $x = g(x)$ تبدیل کنیم. از جمله:

$$1) \quad x^2 + x = x + R \Rightarrow x = 1 + \frac{R-1}{x+1}$$

$$2) \quad 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{R}{x} \right)$$

$$3) \quad 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \sqrt{\frac{x^2 + R}{2}}$$

با فرض $R=2$ و با انتخاب $x_0=1$ و با تقریب کمتر از 0.0001 ، بنابر حالت (۱):

$$x = 1 + \frac{1}{x+1};$$

$$x_1 = 1/5, \quad x_2 = 1/4, \quad x_3 = 1/41666,$$

$$x_4 = 1/41379, \quad x_5 = 1/41428, \quad x_6 = 1/414201$$

بنابر حالت (۲):

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x};$$

$$x_1 = 1/5, \quad x_2 = 1/41666$$

$$x_3 = 1/414219, \quad x_4 = 1/414213$$

بنابر حالت (۳):

$$x = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2}}$$

$$x_1 = 1/22477, \quad x_2 = 1/32287, \dots,$$

$$x_{11} = 1/41404, \quad x_{12} = 1/414127$$

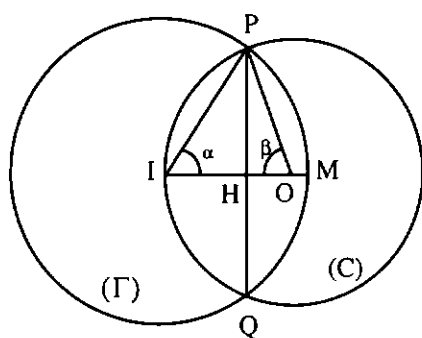
در حالت (۱) پس از ۶ بار، در حالت (۲) پس از ۴ بار و در حالت (۳) پس از ۱۲ بار عمل از سرگیری، در می‌یابیم که جواب پذیرفتنی $1/414$ است و می‌بینیم که بین سه حالت بالا، حالت (۲) بهینه است.

یادآوری می‌شود که تبدیل معادله $x^2 = R$ به معادله $x = \frac{R}{x}$

چراگاه» بیان شده و به مسابقه گذاشته شده است؛ کسی نصف چمنی دایره شکل را صاحب است، یک بز دارد، یک سر رسانی را به گردن بز می بندد و سر دیگر آن را در یک نقطه از محیط چمن ثابت می کند. درازای ریمان را چه اندازه بگیرد تا بز بیش از نیمی از مساحت چمن را نتواند چرا کند؟

به بیان هندسی: دایره (C) به مرکز O و به شعاع R داده شده است. به مرکز I واقع بر محیط دایره (C)، دایره (Γ) به شعاع r، اگر چنان رسم شده باشد که مساحت دایره (C) را نصف کرده باشد، اندازه r را برحسب R به دست آورید.

برای سادگی، شعاع دایره (C) را $R=1$ می گیریم. به فرض $\angle OIP = \alpha$ و $\angle IOP = \beta$ ، در مثلث IOP داریم:



$$2\alpha + \beta = \pi$$

$$\sin \beta = r \sin \alpha$$

و چون مساحت قطعه PIQ از دایره (C) و مساحت قطعه PMQ از دایره (Γ) را حساب کنیم و مجموع آنها را با نصف مساحت دایره (C) برابر بگیریم، به دست می آوریم:

$$\beta + r^2 \alpha - \sin \beta = \frac{\pi}{2}$$

از حذف α و r بین رابطه های بالا به دست می آید:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \sin \beta - 2(\pi - \beta) \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

اکنون روش از سرگیری را روی این معادله، به کار می بریم و

چون IO از IP = IM و بنابر آن β از $\frac{\pi}{3}$ کوچکتر است، مقدار

آغازی β ، را یک رادیان می گیریم. در این صورت، دنباله تقریبهای β برحسب رادیان چنین به دست می آید:

مقدار x^2 خیلی کوچکتر است، و با چشم پوشی از آن، در نخستین رقم با معنای جواب معادله، تفاوتی پیش نخواهد آمد. پس با فرض $x^2 = 0$ به دست می آورد:

$$x \approx 0.1047719 \div 3 \approx 0.03$$

و نتیجه می گیرد، نخستین رقم با معنای جواب معادله ۳ و در مرتبه دوم پس از ممیز واقع است. او رقم با معنای بعدی را a می گیرد و از معادله

$$0.03a = \frac{0.1047719 + (0.03)^2}{3}$$

رقم a را برابر با ۴ به دست می آورد. او محاسبه را به همین ترتیب (و در پایه ۶۰) دنبال می کند و ۹ رقم با معنای بعدی را به دست می آورد.

هرگاه روش از سرگیری را به گونه امروزی آن و با مقدار آغازی $x_0 = 0.03$ به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$x = \frac{0.1047719 + x^2}{3}$$

$$x_0 = 0.03 \Rightarrow (x_n) = 0.03, 0.0349329, \dots$$

$$0.03493381, \dots$$

و تا ۹ رقم پس از ممیز، به عدد 0.034904812 دست می یابیم. یادآوری می شود که در روش از سرگیری، تبدیل

$$x^2 - px + q = 0 \rightarrow x = \frac{q + x^2}{p}$$

تنها برای آن جواب از معادله کارساز است که قدر مطلقش بسیار کوچک باشد و گرنه بهتر است تبدیلی از گونه

$$x = \sqrt[p]{px - q} \quad \text{یا} \quad x = \frac{q}{p - x^2} \quad \text{یا} \quad \dots$$

را به کار برد. چنان که برای معادله $x^2 + x - 3 = 0$ که جواب آن بین ۱ و ۲ واقع است، با تبدیل $x = \sqrt[3]{3 - x}$ و با انتخاب $x_0 = 1$ ، پس از ۹ بار از سرگیری، به جواب 1.2134116 دست می یابیم.

۲- مسأله بز و چراگاه: رسم کردن دایره ای که محیط دایره داده شده ای را نصف کند، کار ساده، و مسأله های حل شدنی زیادی در زمینه آن طرح شده است و می توان طرح کرد. اما رسم کردن دایره ای که مساحت دایره داده شده ای را نصف کند، با خط کش و پرگار، شدنی نیست. این مسأله، با عنوان «مسأله بز و

از سرگیری را به کار ببریم. برای مثال، به فرض $a = \frac{1}{\lambda}$ داریم:

$$\alpha = \frac{4 \sin 2\alpha + \pi}{\lambda}$$

و چون در این حالت، اندازه x نزدیک به یک چهارم شعاع است و بنابر آن:

$$\cos \alpha \approx 0.75, \quad \alpha \approx 0.723$$

مقدار آغازی α را 0.723 می‌گیریم و دنباله تقریبهای α می‌شود:

$$0.723, 0.8881106, 0.882043, 0.8833879,$$

$$0.88331277, 0.8831783, \dots$$

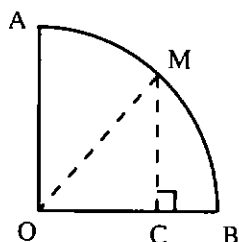
و با تقریب 0.0001 داریم:

$$\alpha = 0.8831 \Rightarrow \frac{x}{R} = 0.3652, \quad \frac{x}{2R} = 0.1826$$

۴- مسأله‌ای از خیام: روی کمان AB از ربع دایره AOB ،

نقطه M را چنان بیابید که اگر C پای عمود وارد از M بر OB باشد، داشته باشیم:

$$\frac{OA}{MC} = \frac{OC}{CB}$$



اگر راه حل جبری را به کار ببریم، با فرض $OC = x$ و با فرض این که شعاع دایره برابر یک باشد، به معادله درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

این معادله، یک ریشه حقیقی دارد که کمی از 0.5 بزرگتر است و چون آن را به صورت

$$x = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

بنویسیم و روش از سرگیری را با مقدار آغازی $x_0 = 0.5$ به کار ببریم، تا پنج رقم پس از ممیز، به جواب $x = 0.54368$ دست می‌یابیم.

می‌توانیم راه مثلثاتی را به کار ببریم. با فرض $\angle MOB = \alpha$ و این که شعاع ربع دایره را یک بگیریم، به معادله مثلثاتی

$$1, 1/4277821, 1/2407038, 1/2358994,$$

$$1/2358969, 1/2358969$$

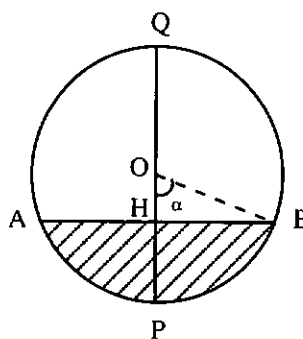
و مقدار r تا 7 رقم پس از ممیز می‌شود:

$$r = 2 \sin \frac{1/2358969}{2} = 1/1587284$$

شعاع دایره‌ای که باید رسم شود، تقریباً $1/16$ برابر شعاع دایره داده شده است.

۳- درجه بندی مخزن گازوئیل: مخزن گازوئیل شوفازخانه‌ها به شکل استوانه است و معمولاً چنان نصب می‌شود که مولدهای آن در وضع افقی اند و لوله‌ای پلاستیکی که سطح گازوئیل درون مخزن را نشان می‌دهد، در وضع قائم قرار دارد. درجه بندی این لوله، در عمل خیلی ساده است؛ هر بار حجم معینی از گازوئیل را درون مخزن می‌ریزند و سطح آن را روی لوله پلاستیکی نشانه می‌گذارند. اما این درجه بندی به عنوان یک مسأله ریاضی، عبارت از این است که اگر نسبت مساحت قطعه‌ای از یک دایره به مساحت آن دایره معلوم باشد، ارتفاع آن قطعه، چه کسری از قطر دایره است؟

شعاع دایره را R ، ارتفاع قطعه دایره را x ، زاویه مرکزی کمان قطعه را 2α ، مساحت قطعه را S ، و نسبت مساحت قطعه به مساحت دایره را a می‌گیریم و خواهیم داشت:



$$x = R(1 - \cos \alpha)$$

$$S = R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$$

و به دست خواهیم آورد:

$$2\alpha - \sin 2\alpha = 2a\pi$$

از این معادله، برای مقدارهای مختلف a ، اندازه α و از روی آن ارتفاع x به دست می‌آید. برای حل این معادله نیز می‌توانیم روش

درجه معلوم است و باید اندازه μ بر حسب درجه به دست آید. بجز روشهایی که نیوتن و کسانی دیگر برای حل معادله به کار بردند، ریاضیدان آلمانی کونیکس، روش از سرگیری با مقدار آغازی $\mu_0 = M$ را به کار برد و زودتر به جواب پذیرفتنی دست یافت. برای مثال، در حالت:

$$e = 0.0028433, M = 215^\circ 28' 47.7''$$

خواهیم داشت:

$$\mu_0 = 215^\circ 28' 47.7''$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 215^\circ 23' 07.2'',$$

$$\mu_2 = \mu_3 = 215^\circ 23' 08''$$

تنها پس از سه بار عمل از سرگیری، جواب پذیرفتنی به دست می آید.
۶- سه مسأله از هفت مسأله شیخ بهایی:

$$1) \begin{cases} x + \sqrt{y} = 10 \\ y + \sqrt{x} = 5 \end{cases}$$

$$x = 10 - \sqrt{5 - \sqrt{x}}, \quad 9 > x > 10 - \sqrt{5}$$

$$x_0 = 8 \Rightarrow x \approx 8.5597593, \quad y = 2.0742933$$

$$2) \begin{cases} x + y = 10 \\ (x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ x = \frac{35}{y + \sqrt{y}} - \sqrt{x} \end{cases}$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8 \Rightarrow x \approx 1.82119, \quad y \approx 8.17881$$

$$3) \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = x \end{cases}$$

$$x = \frac{100}{20 + 8x - x^2}$$

$$x_0 = 3 \Rightarrow x \approx 2.8783657, \quad y \approx 7.1216343$$

یادداشتها:

* Iteration Method

** برای اطلاع بیشتر، می توانید به «کاشانی نامه» تألیف استاد ابوالقاسم قربانی، یا به نوشتار ایشان در مجله ریاضی بکان خرداد ۱۳۴۹ مراجعه کنید.

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

می رسمیم. این معادله را به صورت

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \sin \alpha} \Rightarrow \alpha = \text{Arc}(\cos \frac{1}{1 + \sin \alpha})$$

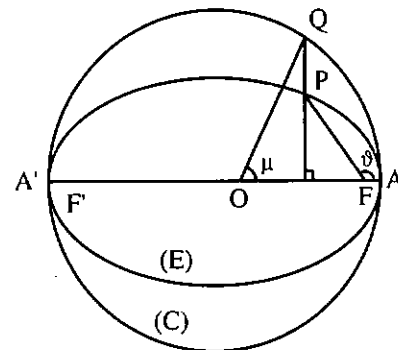
می نویسیم و روی آن، روش از سرگیری را با مقدار آغازی $\alpha_0 = 6^\circ$ به کار می بریم که جواب

$$\alpha = 57^\circ 3' 55''$$

به دست خواهد آمد. (توجه داشته باشید که مجهول x راه حل جبری با $\cos \alpha$ برابر است.)

۵- معادله کپلر: پس از آن که کپلر قانونهای سه گانه حرکت سیاره ها به دور خورشید و نیوتن قانون جاذبه عمومی را به دست آوردند، این مسأله به میان آمد که ثابت کنند از قانون جاذبه عمومی، می توان قانونهای کپلر را به دست آورد. در پی حل این مسأله، با معادله $\mu - e \sin \mu = M$

به نام معادله کپلر روبه رو شدند. در این معادله، μ بی هنجاری مرکزی، M بی هنجاری متوسط، و e خروج از مرکز مدار سیاره به دور خورشید است. اگر بیضی (E) به مرکز O و به قطر بزرگ $A'A$ مدار سیاره، F کانون این بیضی، دایره (C) به قطر $A'A$ دایره اصلی بیضی، P موضع سیاره و Q نقطه نظیر P روی دایره (C) باشد، زاویه $\angle AFP = \nu$ را بی هنجاری حقیقی و زاویه $\mu = \angle AOQ$ را بی هنجاری مرکزی نظیر موضع P از سیاره می نامند.



همچنین سیاره ای فرضی Q' را در نظر می گیرند که پیرامون دایره (C) را با حرکت یکنواخت بپیماید و با سیاره حقیقی در A و A' بر هم واقع باشند و زاویه $\angle AOQ' = M$ را بی هنجاری متوسط می نامند. در معادله کپلر، اندازه e بر حسب رادیان و اندازه M بر حسب