

◉رمیم فی‌الله‌زاده،
دبیر ریاضی از
نامیه‌ی ۲ شهری



روش ارشمیدس برای محاسبهٔ عدد

π

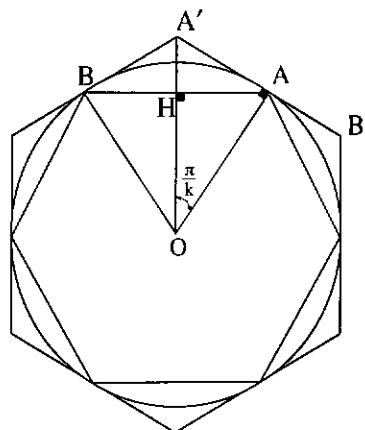
به زبان Qbasic، مقدار π را تا ۶ رقم اعشار محاسبه می‌کنیم (در حالت معمولی در Qbasic اعداد اعشاری بین ۶ تا ۸ رقم محاسبه می‌شوند). مطابق (شکل ۱)، دایره‌ای به شعاع واحد در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی برابر k باشند، که در آن $k = 3 \times 2^{(n-1)}$ و n یک عدد طبیعی است. نصف محیط‌های دو چندضلعی منتظم محیطی و محاطی را به ترتیب با a_n و b_n نشان می‌دهیم. به ازای هر مقدار n یک مقدار برای k به دست می‌آید.

محاسبهٔ منطقی و به روش هندسی برای محاسبهٔ عدد π ، به وسیلهٔ ارشمیدس ریاضیدان بزرگ یونانی در حدود ۲۲۰۰ سال پیش ارائه شده است. این روش بر اساس چندضلعی‌های

منتظم محاطی و محیطی است. در واقع، محیط و مساحت دایره بین محیط و مساحت دو چندضلعی منتظم قرار می‌گیرد و با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی‌ها و محاسبهٔ محیط و مساحت آن‌ها می‌توان با تقریب دلخواه، عدد π را محاسبه کرد.

در این جا ضمن توضیح این روش به کمک یک برنامهٔ ساده

مطابق شکل، در مثلث می توان نوشت:



(شکل ۱)

$$\Delta OAA': \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{AA'}{OA} = AA'$$

$$محیط\ k\ ضلعی\ منتظم\ محاطی = P'_n = k(\gamma AA') = \gamma k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$a_n = \frac{P'_n}{\gamma} = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{a_n = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right)} \quad (۱)$$

به همین ترتیب، در مثلث OAH داریم:

$$\Delta OAH: \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{AH}{OA} = AH$$

$$محیط\ k\ ضلعی\ منتظم\ محاطی = P_n = (\gamma AH)k = \gamma k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$b_n = \frac{P_n}{\gamma} \Rightarrow b_n = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\boxed{b_n = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \quad (۲)$$

حال نشان می دهیم: $b_n < \pi < a_n$ ، برای این کار می توان

$$نوشت: P_n < محیط\ دایره < P'_n$$

$$یا: b_n < نصف\ محیط\ دایره < a_n$$

$$b_n < \pi R < a_n$$

$$\boxed{b_n < \pi < a_n} \quad \text{و چون } R=۱ \text{، پس:}$$

حال به سادگی دیده می شود که با تبدیل n به $n+۱$ در فرمول

k ، مقدار k به γk تبدیل می شود؛ یعنی:

$$n \rightarrow n+۱ \equiv k \rightarrow \gamma k$$

که با اعمال این نکته در فرمول های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$a_{(n+۱)} = \gamma k \tan\left(\frac{\pi}{\gamma k}\right) \quad (۳)$$

و

$$b_{(n+۱)} = \gamma k \sin\left(\frac{\pi}{\gamma k}\right) \quad (۴)$$

اکنون دو رابطه بازگشتی زیر را که در واقع اساس محاسبه عدد π در این روش است، ثابت می کنیم:

$$a_{(n+۱)} = \frac{\gamma(a_n)(b_n)}{(a_n + b_n)} \quad (I)$$

$$b_{(n+۱)} = \sqrt{(a_{(n+۱)}b_n)} \quad (II)$$

اثبات (I):

$$a_n = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

$$b_n = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \Rightarrow \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}$$

که اگر دو رابطه اخیر را با هم جمع کرده و با استفاده از فرمول های مثلثاتی و رابطه (۳)، به سادگی نتیجه می شود:

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = \frac{\gamma}{a_{(n+۱)}}$$

که پس از ساده کردن به فرمول (I) می رسم.

اثبات (II): از ضرب دو رابطه (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$(a_{(n+۱)} \times b_n) = \gamma k \tan\left(\frac{\pi}{\gamma k}\right) \times k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\Rightarrow (a_{(n+۱)} \times b_n) = \gamma k^2 \times \sin^2 \frac{\pi}{\gamma k} = (b_{(n+۱)})^2$$

حال جدولی تشکیل داده و چهار مقدار b_n, a_n, k, n را محاسبه می کنیم.

برای این کار، از یک برنامه ساده به زبان Qbasic استفاده

می کنیم.

البته به ازای $n=۱$ خواهیم داشت $k=۳$ و نصف

محیط های سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی الاضلاع) محیطی

و محاطی به سادگی به دست می آیند، که در نوشتن برنامه به عنوان مقادیر اولیه برای شروع برنامه لازم است.

k = 3	n = 1	a(n) = 5.196152	b(n) = 2.598076
k = 6	n = 2	a(n) = 3.464102	b(n) = 3
k = 12	n = 3	a(n) = 3.21539	b(n) = 3.105829
k = 24	n = 4	a(n) = 3.15966	b(n) = 3.132629
k = 48	n = 5	a(n) = 3.146086	b(n) = 3.13935
k = 96	n = 6	a(n) = 3.142715	b(n) = 3.141032
k = 192	n = 7	a(n) = 3.141873	b(n) = 3.141453
k = 384	n = 8	a(n) = 3.141663	b(n) = 3.141558
k = 768	n = 9	a(n) = 3.14161	b(n) = 3.141584
k = 1536	n = 10	a(n) = 3.141597	b(n) = 3.14159
k = 3072	n = 11	a(n) = 3.141594	b(n) = 3.141592
k = 6144	n = 12	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 12288	n = 13	a(n) = 3.141593	b(n) = 3.141592
k = 24576	n = 14	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592
k = 49152	n = 15	a(n) = 3.141592	b(n) = 3.141592

```

n = 1 => k = 3 => a1 = 3 * tan(π/3) => a1 = 3√3
b1 = 3 * sin(π/3) = 3 * (√3/2)
DIM a(1000), b(1000)
a(1) = (3 * SQR(3))
b(1) = (0.5 * a(1))
CLS
FOR n = 1 TO 15
  K = 3 * 2 ^ (n-1)
  a(n+1) = (2 * a(n) * b(n)) / (a(n) + b(n))
  b(n+1) = SQR(a(n+1) * b(n))
  PRINT "n="; n, "k="; K, "a(n)="; (a(n)),
  "b(n)="; (b(n))
  LPRINT "K="; K, "n="; n, "a(n)="; (a(n)),
  "b(n)="; (b(n))
NEXT n
STOP

```

معمای فکری و منطقی



معمای فکری و منطقی

مدتی نتوانستند مشخص کنند کدام ضربه ها را زده اند؛ زیرا نام های خودشان را بر تابلوی امتیازات نگذاشته بودند. زمانی که بازیکنان سرانجام کارت هاشان را بررسی کردند، مشخص شد دو زوج دارای امتیاز یکسان اند.

زن E، زن B را شکست داد.

یک عصر زیبای بهاری B، E و T با همسرانشان، که نام هاشان نه لزوماً به همین ترتیب، عبارت اند از: H، C و M به زمین گلف رفتند و به اتفاق هجده سوراخ، گلف بازی کردند.

M، H، G و E به ترتیب، ۱۰۶، ۱۰۲، ۱۰۰ و ۹۴ ضربه زدند. B و T و ۹۸ و ۹۶ ضربه زدند؛ اما برای

معمای فکری و منطقی