

رشد و زوال

اشاره

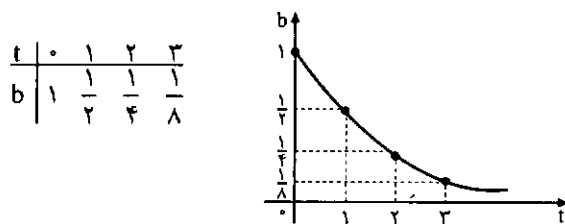
کمیت هایی که مقدار آن ها با گذشت زمان افزایش یا کاهش می یابند، از قوانینی پیروی می کنند که به قوانین رشد و زوال موسوم هستند.

در ابتدا آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع و سریع تر خواهد شد.

تذکر: روابطی از نوع رابطه ی $b = a^t$ که در آن ها $a > 1$ ؛ شکلی مشابه با این نمودار دارند.

نمودار زوال نمایی

برای مثال؛ نمودار تابع $b = (\frac{1}{2})^t$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم.



در نمودار بالا مشاهده می کنید که هرچه زمان به جلو می رود، b سریع تر و سریع تر به سمت صفر یا زوال یا نابودی میل می کند. این به دلیل آن است که پایه $(\frac{1}{2})$ کوچک تر از واحد است، می دانیم که عدد کوچک تر از واحد، وقتی به توان اعداد طبیعی می رسد، مرتب کوچک می شود.

تذکر: روابطی از نوع $b = a^t$ که در آن ها a کوچک تر از ۱ و بزرگ تر از ۰ است ($0 < a < 1$) شکلی مشابه با این نمودار دارند.

مثال ۱. یک صفحه کاغذ سفید بردارید و آن را تا بزنید کاغذ تاخورده را تای جدیدی بزنید و این تازدن ها را تا جایی که

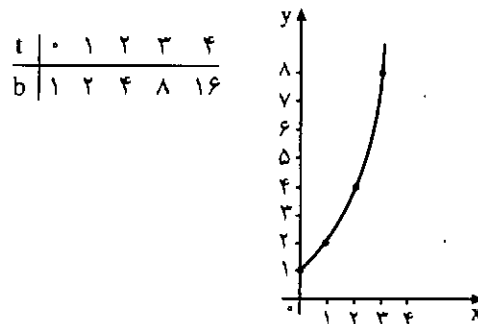
هرگاه کمیت b نسبت به زمان t ، رو به رشد یا زوال برود. یعنی افزایش یا کاهش پیدا کند، معمولاً مدل تغییرات آن از معادله ی زیر به دست می آید:

$$b = a^t$$

الف) اگر $a > 1$ باشد، b رشد می یابد.
ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، b به زوال میل می کند.

نمودار رشد نمایی

برای مثال، نمودار تابع با ضابطه ی $b = 2^t$ را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم:



در این نمودار مشاهده می کنید که هرچه زمان به جلو می رود، b سریع تر و سریع تر رشد می کند. این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می دهد که حتی اگر یک تابع نمایی

فرمول روبه‌رو حساب می‌کنیم: $A_t = A_0(1+r)^t$

این فرمول (با مقایسه‌ی $b = a^t$)، یک تابع نمایی رشد است که در آن تابع A_t به جای b و $(1+r)$ به جای a آمده است.

تذکره: $(1+r)$ فاکتور رشد در یک واحد زمانی و $(1+r)^t$ فاکتور رشد در دوره‌ی زمانی t است.

مثال ۲. جمعیت یک شهر $3/2$ میلیون نفر است. اگر نرخ رشد جمعیت این شهر $1/2$ درصد در سال باشد، بعد از 10 سال جمعیت آن چند نفر می‌شود؟

حل:

$$A_t = 3/2, \quad r = 1/2\% = 0/012, \quad t = 10, \quad A_t = ?$$

$$A_t = A_0(1+r)^t \Rightarrow A_{10} = 3/2(1+0/012)^{10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 3/2(1/012)^{10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 3/6 \text{ نفر میلیون}$$

مثال ۳. فرض کنید که هزینه‌ی تحصیلات عمومی از سال 1370 خورشیدی با آهنگ سالانه‌ی 10 درصد رو به افزایش بوده است. اگر در سال 1370 که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل او 18000 تومان بوده باشد، این هزینه در سال 1388 (پس از 18 سال)، چه قدر شده است؟

حل:

$$r = 10\% = \frac{10}{100} = 0/1, \quad A_0 = 18000, \quad t = 18, \quad A_{18} = ?$$

$$A_t = A_0(1+r)^t \Rightarrow A_{18} = 18000(1+0/1)^{18}$$

$$\Rightarrow A_{18} = 18000(1/1)^{18}$$

$$\Rightarrow A_{18} = 100078 \text{ تومان}$$



می‌توانید ادامه دهید.

چگونگی افزایش تعداد ناحیه‌هایی

که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و

چگونگی تغییر مساحت‌های آن‌ها را بررسی کنید.

حل: بعد از اولین تازدن ($n=1$)، دو ناحیه به وجود می‌آید

که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تازدن

($n=2$) چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها

نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در سومین تا

زدن ($n=3$)، هشت ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام

از آن‌ها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{8}$ مساحت اولیه است و

همین‌طور... مطالب بالا را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعداد تازدن‌ها	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$1 = 2^0$	$1 = (\frac{1}{2})^0$
۱	$2 = 2^1$	$2 = (\frac{1}{2})^1$
۲	$4 = 2^2$	$4 = (\frac{1}{2})^2$
۳	$8 = 2^3$	$8 = (\frac{1}{2})^3$
...	...	...
n	2^n	2^n

همان‌طور که در جدول می‌بینید هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها

بر اثر تازدن‌های متوالی بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود، مساحت

ناحیه‌ها کم‌تر و کم‌تر می‌شود! در واقع تعداد ناحیه‌ها به‌طور

نمایی رشد می‌کند و مساحت ناحیه‌ها به‌طور نمایی روبه‌زوال

می‌رود.

تذکره: با بررسی دقیق‌تر جدول بالا، مشاهده می‌کنیم

که فاکتور زوال $a = \frac{1}{2}$ است که از یک کوچک‌تر است،

در حالی که فاکتور رشد $a = 2$ است که از یک بزرگ‌تر

است.

رشد نمایی

هرگاه A_0 ، برای مثال، هزینه‌ی اولیه یا سرمایه‌ی اولیه یا

جمعیت کشور در سال معینی باشد، r آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه

یا سرمایه یا جمعیت کشور، t تعداد سال‌ها و A_t هزینه‌ی انباشته

شده یا سرمایه‌ی انباشته شده و یا جمعیت ایجاد شده بعد از t

سال باشد، این مجموع انباشته یا ایجاد شده را با استفاده از

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه،

آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به دست آوریم که به واقعیت نزدیک‌تر است. به طور کلی، اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، یعنی $\frac{1}{n}$ ، آن‌گاه فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

مثال ۴. جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال بعد با توجه به جمعیت اولیه‌ی $5/2$ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قرار دادن زمان بر حسب ماه، چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۲ درصد در ماه است؟

$$A_0 = 5/2, t = 35, A_{35} = ?, n = 12, r = 0/02$$

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow A_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0/02}{12}\right)^{12 \times 35}$$

$$\Rightarrow A_{35} = 5/2 (1/001)^{420}$$

$$\Rightarrow A_{35} = 10/465 \text{ میلیارد نفر}$$

مثال ۵. شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان با نرخ سود علی‌الحساب ۴ درصد به حساب سپرده گذاشته است. چه مبلغی (اصل و فرع) پس از ۱۰ سال دریافت می‌کند اگر سود در پایان هر سه ماه پرداخت شود؟

حل:

$$A_0 = 10000, r = 0/04, t = 10, n = 4, A_t = ?$$

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow A_{10} = 10000 \left(1 + \frac{0/04}{4}\right)^{4 \times 10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 10000 (1/01)^{40}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 14888/63 \text{ تومان}$$

تمرین ۱. جمعیت شهری در دو سال آینده با توجه به جمعیت اولیه‌ی ۱۰۰۰۰۰ نفری آن، و قرار دادن زمان بر حسب روز چند نفر خواهد شد، در صورتی که بدانیم آهنگ رشد جمعیت ۱/۰ درصد در روز است؟

جواب: ۱۰۰۱۴۴ نفر

تمرین ۲. اگر با نرخ ۱۲ درصد، آخر هر ماه سود علی‌الحساب بر سرمایه اضافه شود، پس از پنج سال سرمایه‌ی فعلی در چه عددی ضرب می‌شود؟
جواب: سرمایه‌ی فعلی باید در $(1/01)^{60}$ ضرب شود.

زوال نمایی

در شیمی، به مدت

زمانی که طول می‌کشد تا مقداری

از یک ماده‌ی رادیواکتیو به نصف برسد،

نیمه عمر گفته می‌شود. برای مثال نیمه عمر

نوعی ایزوتوپ در حدود پنج دقیقه است. پس از

گذشت نیم ساعت، چه کسری از ماده‌ی اولیه باقی مانده است؟

حل: ۳۰ دقیقه شامل ۶ دوره‌ی زمانی ۵ دقیقه‌ای است.

$$1 \xrightarrow{5'} \frac{1}{2} \xrightarrow{5'} \frac{1}{4} \xrightarrow{5'} \frac{1}{8} \xrightarrow{5'} \frac{1}{16} \xrightarrow{5'} \frac{1}{32} \xrightarrow{5'} \frac{1}{64}$$

بنابراین، پس از نیم ساعت، $\frac{1}{64}$ از ماده‌ی اولیه باقی مانده

است.

مثال ۶. نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۶ ساعت است. اگر ۱۹۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز (۲۴ ساعت) چه مقدار از این ماده باقی خواهد ماند؟

$$192 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 96 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 48 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 24 \text{ gr} \xrightarrow{6 \text{ ساعت}} 12 \text{ gr}$$

بنابراین، پس از یک شبانه‌روز، ۱۲ گرم از ماده‌ی اولیه

باقی مانده است.

معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت $A = A_0(1-r)^t$ است که در آن A بیانگر مقدار نهایی، A_0 بیانگر مقدار اولیه، t بیانگر میزان نزول (زوال) بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال ۷: نیمه عمر ماده‌ی رادیواکتیوی ۴ ساعت است. اگر ۱۱۵۲ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از گذشت یک شبانه‌روز، چند گرم از ماده‌ی اولیه تجزیه نشده باقی مانده است؟

حل:

$$T = 24 = 4 \times t \Rightarrow t = 6$$

$$A = A_0(1-r)^t; A_0 = 1152, r = \frac{1}{2}$$

$$A = 1152 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^6 = 1152 \times \frac{1}{64} = 18 \text{ گرم}$$

بعد از گذشت یک شبانه‌روز، ۱۸ گرم از ماده‌ی رادیواکتیو

باقی خواهد ماند.

