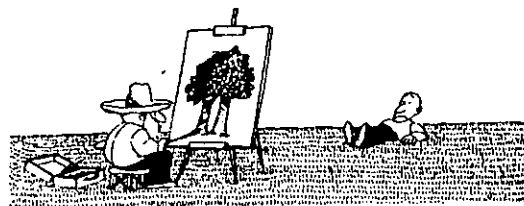
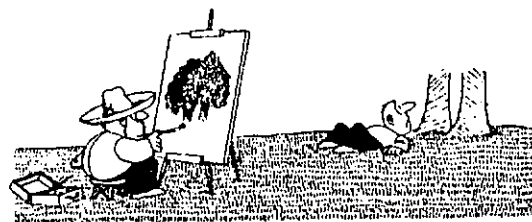
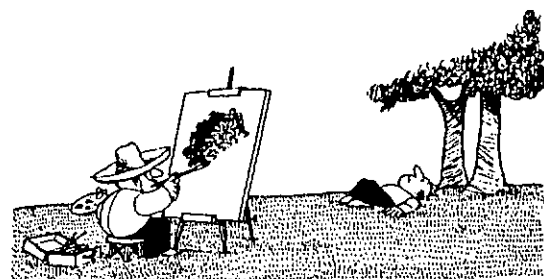
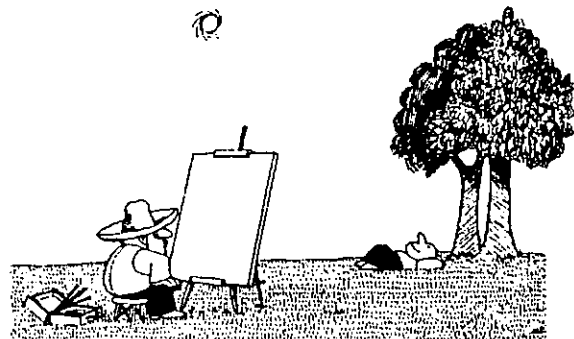
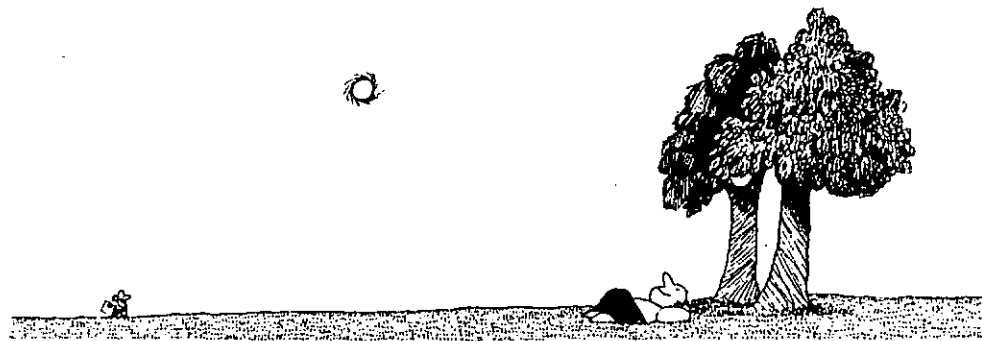


رشد و زوال

(دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی،
رشته های ریاضی و تجربی)

● میرشهرام صدر

در این مقاله، یکی از کاربردهای مشتق و تابع نمایی را مورد بررسی قرار می دهیم. برای این منظور، کمیت هایی را مورد مطالعه قرار می دهیم که در حال افزایش (رشد) یا کاهش (زوال) هستند و آهنگ تغییرات آنها (رشد یا زوال) نسبت به زمان، متناسب با مقدار کمیت اولیه است. برای مثال، اگر پول خود را نزد یکی از بانکها برای سرمایه گذاری بلندمدت، سپرده گذاری کنید پس از گذشت زمانی، مقدار پول افزایش (رشد) می یابد و متناسب با مقدار پول اولیه است. اما در هر ماده رادیواکتیو، بعد از مدتی، نصف اتمهای رادیواکتیو موجود در آن، متلاشی (زوال) می شود و این مدت زمان را نیمه عمر ماده رادیواکتیو گوئیم. برای مثال، «رادیوم» دارای نیمه عمر ۱۶۲۰ سال است؛ یعنی اگر هم اکنون یک گرم رادیوم داشته باشیم، پس از گذشت ۱۶۲۰ سال، فقط ۰/۵ گرم آن فعال باقی می ماند و پس از گذشت ۱۶۲۰ سال دیگر، تنها ۰/۲۵ گرم رادیوم فعال داریم. بنابراین، اگر زمان را با t واحد نمایش دهیم



و اندازه کمیت موجود در هر زمان A واحد باشد، آن گاه با فرض این که k عدد ثابتی است، آهنگ تغییرات کمیت A نسبت به زمان t یعنی $\frac{dA}{dt}$ متناسب با مقدار A است؛ پس داریم:

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (1)$$

اگر در حالی که t افزایش می یابد، به A افزوده شود، آن گاه $k > 0$ و قانون رشد طبیعی برقرار است. اگر در حالی که t افزایش می یابد، A کاهش یابد، آن گاه $k < 0$ و قانون زوال طبیعی برقرار است.

اکنون با توجه به رابطه (۱) به دنبال معادله ای هستیم که به کمک آن، بتوان کمیت A را در زمان t به دست آورد؛ یعنی باید کمیت A را برحسب t به دست آوریم. برای این منظور، نیازمند ابزار جدیدی به نام انتگرال نامعین هستیم؛ بنابراین ابتدا، انتگرال نامعین را تعریف می کنیم و سپس به کمک آن، معادله ای با توجه به رابطه (۱) به دست می آوریم که کمیت A را در زمان t مشخص کند.

تابع اولیه (انتگرال معین)

تابع مشتق پذیر با ضابطه $F(x) = x^2 + 3x + 1$ را در نظر بگیرید. می دانیم مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$F'(x) = 2x + 3$$

اکنون بنا به تعریف تابع با ضابطه $F(x) = x^2 + 3x + 1$ را تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ می نامند.

به همین ترتیب، اگر تابع با ضابطه $G(x) = x^2 + 3x + 5$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$G'(x) = 2x + 3$$

یعنی تابع با ضابطه $G(x) = x^2 + 3x + 5$ نیز یک تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ است. در نتیجه، اگر C یک عدد ثابت دلخواه باشد، هر تابع با ضابطه $F(x) = x^2 + 3x + C$ تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ است. در این حالت می نویسیم:

$$\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C$$

و می خوانیم انتگرال نامعین تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ برابر تابع با ضابطه $F(x) = x^2 + 3x + C$ است.

تعریف. اگر f تابعی باشد که در بازه ای شامل فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، آن گاه F را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع f می نامند؛ در صورتی که برای هر $x \in [a, b]$ ، داشته باشیم:

$$F'(x) = f(x)$$

تابع اولیه f را به صورت $\int f(x) dx$ نمایش می دهیم. با توجه به تعریف بالا، اگر تابع $F(x)$ یک تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای تابع $f(x)$ باشد، یعنی داشته باشیم: $F'(x) = f(x)$ و C یک عدد ثابت دلخواه باشد، چون مشتق تابع ثابت، برابر صفر است، آن گاه تابع $F(x) + C$ نیز تابع اولیه (انتگرال نامعین) برای تابع $f(x)$ است؛ بنابراین هر تابع که تابع اولیه (انتگرال نامعین) داشته باشد، بی شمار تابع اولیه دارد و در این حالت، تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع $f(x)$ با تقریب یک عدد ثابت، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

مثال ۱. تابع با ضابطه $F(x) = kx$ ، $(k \in \mathbb{R})$ را در نظر می گیریم؛ چون $F'(x) = k$ ، بنابراین داریم:

$$\int k dx = kx + C$$

مثال ۲. تابع با ضابطه $F(x) = \sin x$ را در نظر می گیریم؛ چون $F'(x) = \cos x$ ، بنابراین داریم:

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

مثال ۳. تابع با ضابطه $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$ ، $(a \neq 0)$ را در نظر می گیریم؛ چون $F'(x) = e^{ax}$ ، بنابراین داریم:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

مثال ۴. تابع با ضابطه $F(x) = \ln|x|$ را در نظر می گیریم؛ چون $F'(x) = \frac{1}{x}$ ، بنابراین داریم:

از این شرط که $t = 40$ و $A = 60000$ نتیجه می شود که :

$$60000 = 40000 \cdot e^{40k} \Rightarrow e^{40k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{40} \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k = \ln \sqrt[40]{\frac{3}{2}}$$

با قرار دادن مقدار k در معادله (۱) داریم :

$$A = 40000 \cdot e^{\ln \sqrt[40]{\frac{3}{2}} \cdot t}$$

اگر در این معادله قرار دهیم $t = T$ و $A = 80000$ ، نتیجه می شود که :

$$80000 = 40000 \cdot e^{\ln \sqrt[40]{\frac{3}{2}} \cdot T} \Rightarrow \ln \sqrt[40]{\frac{3}{2}} \cdot T = \ln 2$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\ln \sqrt[40]{\frac{3}{2}}} \approx 68 / 38$$

بنابراین پس از گذشت ۶۸ سال و در سال شصت و نهم از لحظه شروع، جمعیت این جامعه به ۸۰۰۰۰ نفر می رسد.

مثال ۶. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری، متناسب با تعداد باکتری موجود است، اگر تعداد باکتریها پس از گذشت ۳ ساعت، سه برابر شود و در پایان ۱۲ ساعت، تعداد آنها ۱۰ میلیون شود، در این صورت، چند باکتری در آغاز داشته ایم. حل. شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۳	۱۲
A	x	3x	10 ⁷

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t = 0$ و $A = x$ داریم :

$$x = Ce^0 \Rightarrow C = x \Rightarrow A = xe^{kt}$$

در حالتی که $t = 3$ و $A = 3x$ ، نتیجه می شود که :

$$3x = xe^{3k} \Rightarrow 3 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln 3 = \ln \sqrt[3]{3}$$

در حالتی که $t = 12$ و $A = 10^7$ ، خواهیم داشت :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

اکنون در ادامه بحث رشد و زوال، با استفاده از انتگرال نامعین

و مثالهای بالا، کمیت A را بر حسب t از رابطه $\frac{dA}{dt} = kA$ به

دست می آوریم :

$$\frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow \frac{dA}{A} = kdt \text{ (متغیرها از هم جدا شده اند)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int kdt \Rightarrow \ln|A| = kt + C_1$$

در نتیجه داریم :

$$|A| = e^{kt+C_1}$$

چون $A > 0$ ، بنابراین :

$$A = e^{kt} \times e^{C_1}$$

با فرض این که $C = e^{C_1}$ خواهیم داشت :

$$A = Ce^{kt}$$

با توجه به رابطه بالا، ملاحظه می کنیم که توانستیم A را بر حسب t به دست آوریم و پس از این، در حل مسائل رشد و زوال، از این فرمول استفاده می کنیم.

مثال ۵. آهنگ افزایش طبیعی جمعیت شهری، متناسب با جمعیت آن شهر است. اگر در طی چهل سال، جمعیت از ۴۰۰۰۰ نفر به ۶۰۰۰۰ نفر افزایش یابد، چه موقع جمعیت به ۸۰۰۰۰ نفر می رسد؟

حل. فرض کنیم فاصله زمانی از آغاز t سال باشد. تعداد افراد جامعه در سال t ام را با A نمایش داده و معادله زیر، تعداد افراد جامعه را در سال t ام نشان می دهد :

$$A = Ce^{kt}$$

شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است :

t	۰	۴۰	T
A	40000	60000	80000

در حالتی که $t = 0$ و $A = 40000$ خواهیم داشت :

$$40000 = Ce^0 \Rightarrow C = 40000 \Rightarrow A = 40000 \cdot e^{kt} \quad (1)$$

دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است، داریم:

$$(I) \frac{dA}{dt} = k(A - 35)$$

همان اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است:

شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است:

t	۰	۴۰	۱۲۰
A	۱۲۰	۶۰	x

اگر در رابطه (I) متغیرها از هم جدا شوند، داریم:

$$\frac{dA}{(A - 35)} = k dt \Rightarrow \int \frac{dA}{(A - 35)} = \int k dt$$

$$\Rightarrow \ln|A - 35| = kt + C_1$$

$$\Rightarrow |A - 35| = e^{kt+C_1}$$

چون $A - 35 > 0$ ، داریم:

$$A - 35 = e^{kt} \times e^{C_1}$$

با فرض $C = e^{C_1}$ خواهیم داشت:

$$A = Ce^{kt} + 35$$

در حالتی که $t = 0$ و $A = 120$ ، نتیجه می شود:

$$120 = Ce^0 + 35 \Rightarrow C = 85 \Rightarrow A = 85e^{kt} + 35$$

در حالتی که $t = 40$ و $A = 60$ ، داریم:

$$60 = 85e^{40k} + 35 \Rightarrow e^{40k} = \frac{5}{17}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{40} \ln \frac{5}{17} = \ln \sqrt[40]{\frac{5}{17}}$$

در حالتی که $t = 120$ ، داریم:

$$A = 85e^{120 \ln \sqrt[40]{\frac{5}{17}}} + 35 = 85 \times \left(\frac{5}{17}\right)^3 + 35 = 37/16^\circ$$

مثال ۹. اگر سود با نرخ سالیانه ۸ درصد و به طور پیوسته

محاسبه شود، پس از چه مدت، ۵۰۰۰ تومان سپرده به ۱۰۰۰۰ تومان افزایش می یابد؟

$$k = 0.08 \Rightarrow A = Ce^{0.08t}$$

$$10^4 = xe^{120 \ln \sqrt[40]{\frac{5}{17}}} \Rightarrow 10^4 = xe^{\ln 2^3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10^4}{2^3} \approx 123457$$

مثال ۷. فرض کنید بهای یک گلدان عتیقه، با قدمت آن افزایش می یابد و آهنگ رشد بهای آن در هر زمان، متناسب با بهایش در همان زمان باشد. اگر بهای گلدان عتیقه در ده سال پیش ۲۵۰۰۰۰ تومان و بهای آن در حال حاضر ۳۵۰۰۰۰ تومان باشد، انتظار می رود در ۳۰ سال بعد، بهای گلدان عتیقه چه قدر باشد؟ شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است:

t	۰	۱۰	۳۰
A	۲۵۰۰۰۰	۳۵۰۰۰۰	x

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t = 0$ و $A = 250000$ ، داریم:

$$250000 = Ce^0 \Rightarrow C = 250000 \Rightarrow A = 250000e^{kt}$$

در حالتی که $t = 10$ و $A = 350000$ ، نتیجه می شود که:

$$350000 = 250000e^{10k} \Rightarrow \frac{7}{5} = e^{10k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln \frac{7}{5} = \ln \sqrt[10]{\frac{7}{5}}$$

در حالتی که $t = 30$ ، خواهیم داشت:

$$A = 250000e^{30 \ln \sqrt[10]{\frac{7}{5}}} \Rightarrow A = 250000 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3$$

تومان ۶۸۶۰۰۰

مثال ۸. طبق قانون نیوتن، برای کاهش دما در یک جسم، آهنگ تغییر دمای هر جسم، متناسب با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن است. اگر جسمی در هوای با دمای ۲۵ درجه باشد و طی ۴۰ دقیقه، دمای جسم از ۱۲۰ درجه به ۶۰ درجه برسد، دمای آن پس از ۱۲۰ دقیقه چه قدر است؟

حل. فرض کنیم از زمانی که جسم شروع به سرد شدن می کند، t دقیقه گذشته باشد و فرض کنیم دمای جسم در دقیقه t ام، A درجه باشد، چون آهنگ تغییر دما در جسم، متناسب با اختلاف

۲۰۰۰ چند نفر است؟

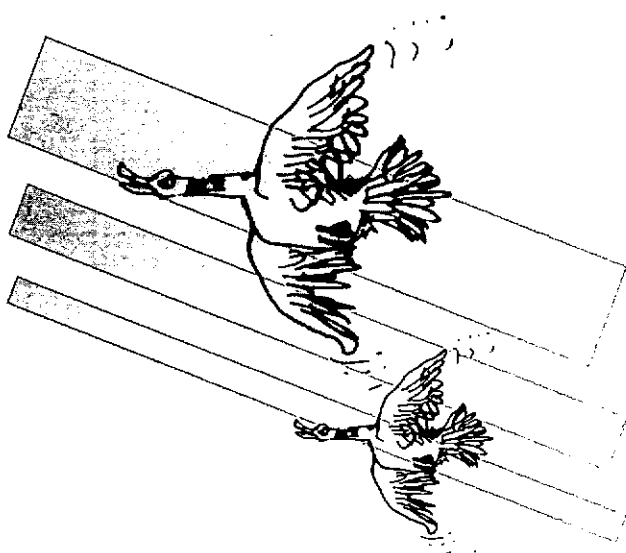
۲. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر در آغاز ۱۰۰۰ باکتری وجود داشته باشد و تعداد باکتریها در هر ۱۲ دقیقه، دو برابر شود، پس از

گذشت چه مدت، تعداد باکتریها به ۱۰^6 می‌رسد؟

۳. در هر زمان، آهنگ واپاشی رادیم متناسب با مقدار موجود آن است. اگر اکنون ۶۰ میلی‌گرم رادیم داشته باشیم و نیمه عمر آن ۱۶۹۰ سال باشد، ۱۰۰ سال دیگر چقدر رادیم خواهیم داشت؟

۴. پس از این که وسیله‌ای یک سال کار کند، در هر زمان، آهنگ استهلاک آن، متناسب با بهای همان وسیله در آن زمان است. اگر وسیله‌ای در اوّل فروردین ۱۳۶۹ خریداری شده باشد و بهای آن در اوّل فروردین ۱۳۷۰، ۷۰۰۰۰۰ تومان و در اوّل فروردین ۱۳۷۱، ۵۸۰۰۰۰ تومان بوده باشد، بهای مورد انتظار آن وسیله در اوّل فروردین ۱۳۷۵ چه قدر است؟

۵. اگر دمای جسمی در هوایی که دمای آن 0° درجه است، طی 40° دقیقه از 200° درجه به 100° درجه برسد، با استفاده از قانون نیوتن، برای سرد شدن (تمرین حل شده «۳») تعیین کنید که پس از چند دقیقه دیگر، دمای آن به 50° درجه می‌رسد؟



شرایط اولیه، در جدول زیر آمده است:

t	0	T
A	5000	10000

در حالتی که $t=0$ و $A=5000$ ، داریم:

$$5000 = Ce^{\dots} \Rightarrow C = 5000 \Rightarrow A = 5000 e^{0.08t}$$

در حالتی که $A=10000$ ، خواهیم داشت:

$$10000 = 5000 e^{0.08t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.08} = 8.66$$

یعنی پس از گذشت هشت سال و در سال نهم، سپرده به 10000 تومان می‌رسد.

مثال ۱۰. نیمه عمر فسفر رادیواکتیو ۱۴ روز است. اگر ۲ گرم از این ماده را در محفظه‌ای داشته باشیم، پس از ۲۸ روز، چه مقدار از آن فعال باقی می‌ماند.

حل. شرایط اولیه، در جدول زیر مشخص شده است:

t	0	۱۴	۲۸
A	۲	۱	x

$$A = Ce^{kt}$$

در حالتی که $t=0$ و $A=2$ ، داریم:

$$2 = Ce^{\dots} \Rightarrow C = 2 ; A = 2e^{kt}$$

در حالتی که $t=14$ و $A=1$ ، نتیجه می‌شود که:

$$1 = 2 \times e^{14k} \Rightarrow k = \frac{1}{14} \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt[14]{\frac{1}{2}}$$

در حالتی که $t=28$ ، خواهیم داشت:

$$A = 2 \times e^{\ln \sqrt[14]{\frac{1}{2}} \times 28} = 2e^{28 \ln \sqrt[14]{\frac{1}{2}}} = 2e^{\ln \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} = 0.5$$

یعنی پس از ۲۸ روز، ۰/۵ گرم فسفر رادیواکتیو فعال داریم.

مسائل برای حل

۱. آهنگ افزایش جمعیت شهر معینی، متناسب با جمعیت شهر است. اگر جمعیت در سال ۱۳۴۰، ۵۰۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۷۰، ۷۵۰۰۰ نفر بوده باشد، جمعیت مورد انتظار در سال