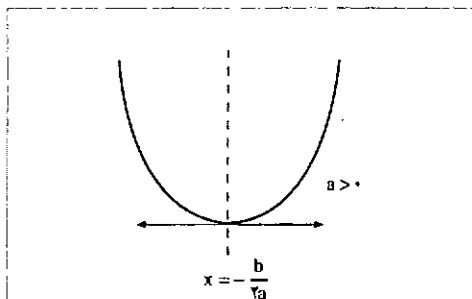
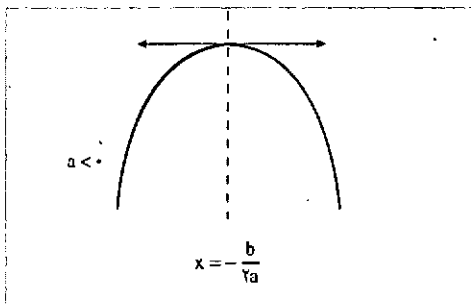


رسم نمودار تابع

(درجه‌ی دوم، درجه‌ی سوم، هموگرافیک و مثلثاتی)

قسمتی از خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که درون کاسه‌ی منحنی است.

۵. شکل کلی این تابع به صورت‌های زیر است:



● احمد قندهاری

ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

۱. اگر $a > 0$ ، آن‌گاه نمودار تابع یک مینی مم نسبی، و اگر $a < 0$ ، نمودار تابع یک ماکزیمی مم نسبی دارد.

۲. $x = -\frac{b}{2a}$ طول اکسترمم نسبی و $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ عرض

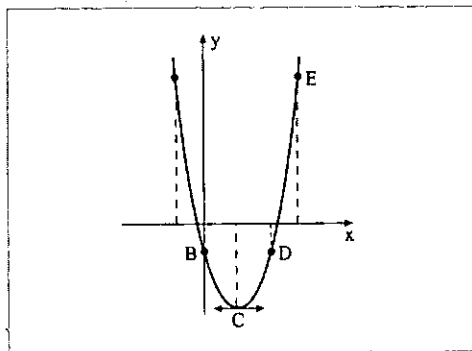
اکسترمم نسبی است.

۳. خط به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ معادله‌ی محور تقارن نمودار

تابع است.

۴. اگر خط $y = m$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ را در نقاط A و B قطع کند، مکان هندسی نقطه‌ی C وسط AB،

کمکی					کمکی				
x	-∞	-1	0	1	2	3	+	+	+
y'	-	-	-	0	+	+	+	+	+
y	+	5	-1	-3	-1	5	+	+	+
	A	B	C	D	E				



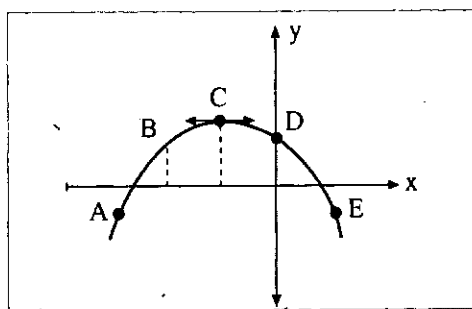
$$3) y = -\frac{x^3}{3} - x + 1$$

$$y'_x = -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{طول نقطه‌ی ماکزی می نسبی}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

کمکی					کمکی				
x	-∞	-3	-2	-1	0	1	+	+	+
y'	+	+	+	0	-	-	-	-	-
y	-	-	-	-	3	2	-	-	-
	A	B	C	D	E				



مسئله ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y = ax^3 + bx + c$ ، a, b, c

را چنان بیابید که نمودار تابع، محور y را در نقطه‌ای به عرض (۱) قطع کند و نقطه‌ی (۱-و ۱) اکسترم نسبی تابع باشد.

حل: نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها
نقطه‌ی اکسترم نسبی

$$A(0, 1) \quad \text{در معادله‌ی تابع} \quad 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$x = -\frac{b}{3a} = 1 \Rightarrow b = -3a$$

برای رسم نمودار تابع چنین عمل می‌کنیم:

الف) ریشه‌ی معادله‌ی $y'_x = 0$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) به x صفر می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم و به y صفر می‌دهیم، x ها را محاسبه می‌کنیم.

چنانچه معادله‌ی $y = 0$ ، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد یا ریشه‌های آن کسری یا رادیکالی باشد، از نقاط کمکی برای رسم استفاده می‌کنیم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم. در سطر اول x ها را می‌نویسیم و در سطر دوم y'_x را تعیین علامت می‌کنیم. سپس جدول را کامل می‌کنیم. به کمک جدول و مطالب فوق، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

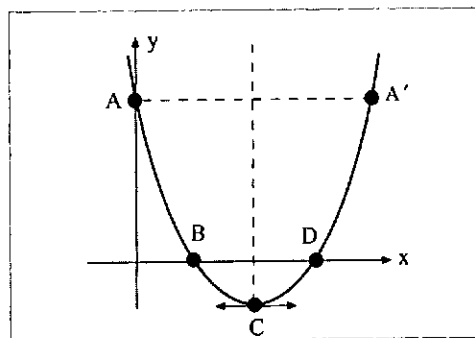
مسئله ۱. مطلوب است رسم جدول و نمودار هر یک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

$$1) y = x^3 - 4x + 3$$

$$y'_x = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{طول نقطه‌ی مینی می نسبی}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3, y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty, x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8 + 3 = -1$$



x	-∞	0	1	2	3	+	+	+
y'	-	-	-	0	+	+	+	+
y	+	3	-1	-1	3	+	+	+
	A	B	C	D	E			

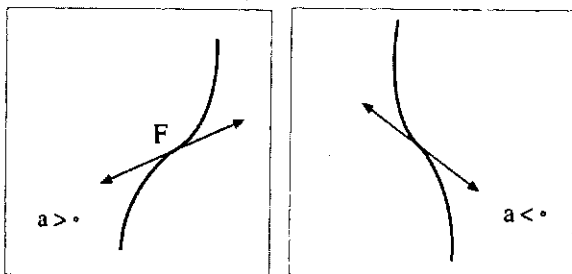
$$2) y = 2x^3 - 4x - 1$$

$$y'_x = 6x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{طول مینی می نسبی}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1$$

از حل معادله‌ی $y = 0$ صرف نظر می‌کنیم، زیرا جواب‌های معادله‌ی $y' = 0$ رادیکالی است. برای بهتر رسم کردن منحنی، دو عدد ۲ و ۳ در سمت راست جواب مشتق و دو عدد ۰ و ۱- در سمت چپ جواب مشتق به عنوان x های کمکی می‌نویسیم.

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$



$$y = \frac{fac - b^2}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{fa - b^2}{2a} = -1 \Rightarrow -fa = fa - b^2$$

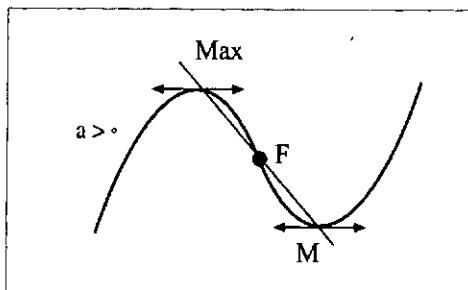
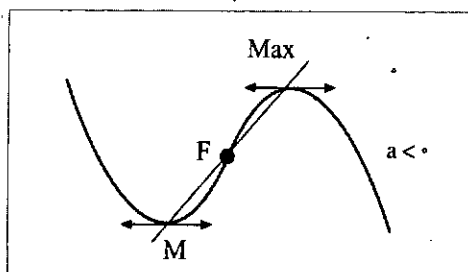
$$\Rightarrow b^2 - 2a = 0 \Rightarrow fa^2 - 2a = 0 \Rightarrow fa(a - 2) = 0, a \neq 0$$

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -2a \Rightarrow b = -4$$

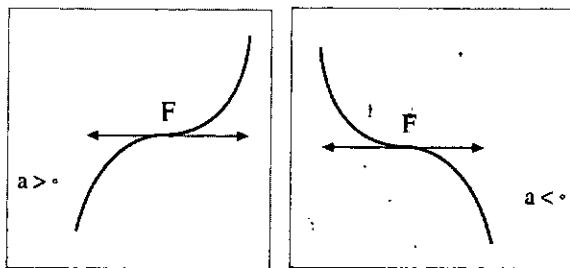
رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم

این تابع در حالت کلی به صورت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است.

۱. اگر معادله‌ی $y'_x = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، نمودار تابع یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد که نقطه‌ی عطف به طول $x = -\frac{b}{3a}$ در وسط آن‌ها قرار دارد و مرکز تقارن نمودار تابع است.



۲. اگر معادله‌ی $y'_x = 0$ ریشه‌ی حقیقی مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطه‌ی عطف است و نمودار تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.



۳. اگر معادله‌ی $y'_x = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باز هم منحنی تابع نقاط اکسترمم نسبی دارد.

برای رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم، ابتدا معادله‌ی $y'_x = 0$ را حل و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. چنانچه معادله‌ی $y'_x = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، از ریشه‌ی $y'' = 0$ به عنوان نقطه‌ی اصلی منحنی استفاده می‌کنیم. البته ریشه‌ی $y'' = 0$ طول نقطه‌ی عطف است. سپس مانند تابع درجه‌ی دوم حل را ادامه می‌دهیم. مسئله: مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

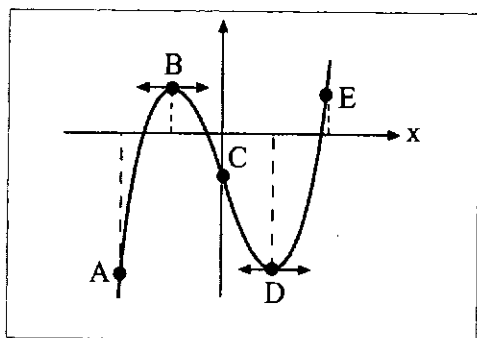
۱) $y = x^3 - 3x - 1$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1, x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'_x	+	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-3	-1	-1	-3	1	$+\infty$
		A	B	C	D	E	



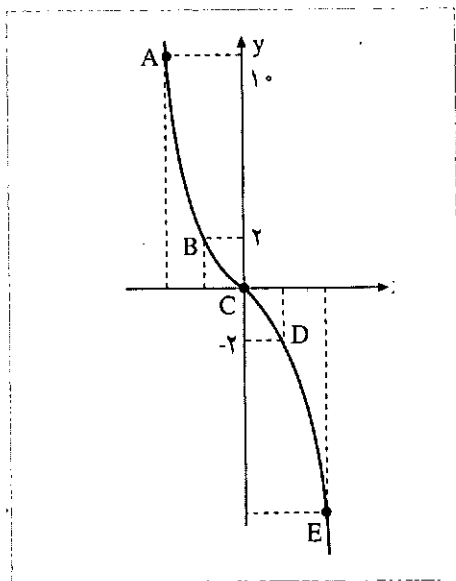
۲) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

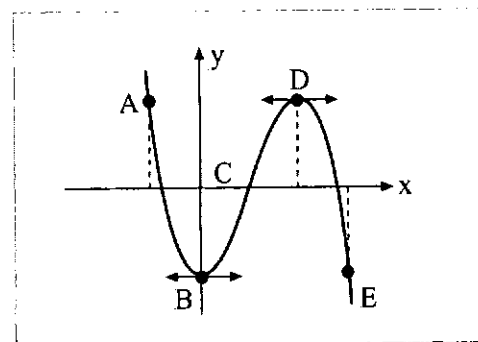
$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \mp\infty$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2$$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'_x	-	-	-	-	-	-	-
y	$+\infty$	1	0	0	-2	-1	$-\infty$
	A	B	C	D	E		

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'_x	-	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$	2	1	0	1	2	$+\infty$
	A	B	C	D	E		



معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس $x = 1$ طول نقطه‌ی عطف است.

$$3) y = (x-1)^3$$

$$y'_x = 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

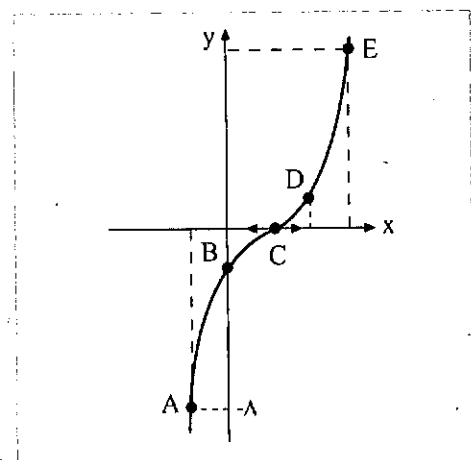
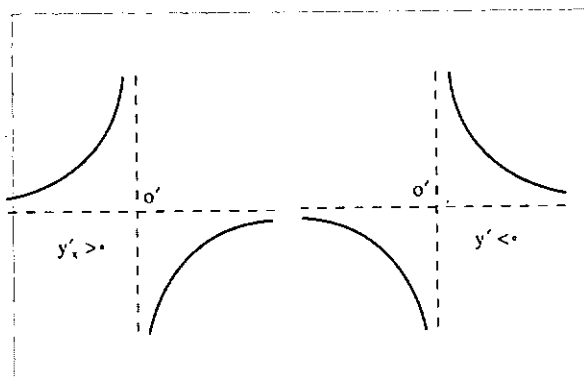
رسم نمودار تابع هموگرافیک

ضابطه‌ی تابع هموگرافیک در حالت کلی به صورت

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0$$

معادله‌ی $x = -\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \frac{a}{c}$ دارد.

اگر $y'_x > 0$ ، تابع اکیداً صعودی و اگر $y'_x < 0$ ، تابع اکیداً نزولی است.



x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
y'_x	+	+	+	0	+	+	+
y	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
	A	B	C	D	E		

معادله‌ی $y'_x = 0$ ریشه‌های حقیقی ندارد.

$$4) y = -x^2 - x$$

$$y'_x = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$y'_x = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

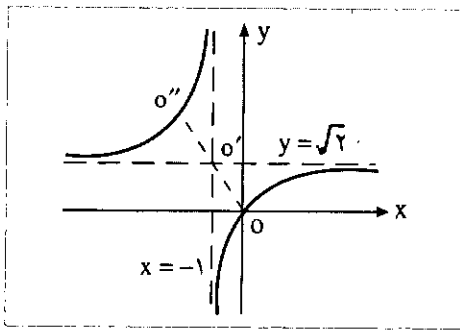
$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \mp\infty$$

محل تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $O'(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن

منحنی است. برای رسم جدول تغییرات و نمودار تابع، ابتدا

معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی را به دست می‌آوریم و سپس

y'_x را محاسبه می‌کنیم. برای رسم دقیق نمودار، در دست داشتن



x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y'_x	+		+	+
y	$\sqrt{2}$		$-\infty$	$\sqrt{2}$

یک نقطه از منحنی کافی است. زیرا محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن منحنی است. جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم و پس از آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.
مسئله ۱. جدول تغییرات و نمودار هریک از تابع‌های باضابطه‌ی زیر را بیایید.

$$1) y = \frac{2x+1}{2x-1}$$

معادله‌ی مجانب قائم

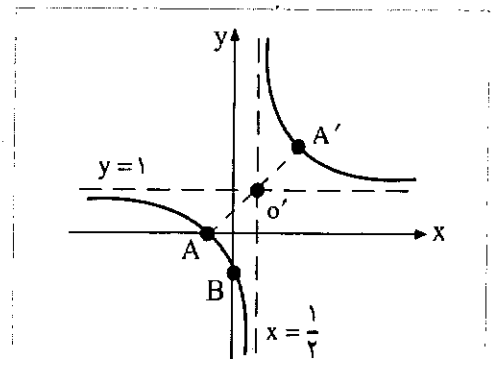
$$\text{مجانِب قائم: } y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

معادله‌ی مجانب افقی

$$\text{مجانِب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = \frac{2}{2} \Rightarrow y=1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \text{ و } y=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$y'_x = \frac{-2}{(2x-1)^2} < 0$$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'_x	-	-	-		-
y	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$-\infty$		$+\infty$

$$2) y = \frac{\sqrt{2}x}{x+1}$$

معادله‌ی مجانب قائم

$$\text{مجانِب قائم: } y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

معادله‌ی مجانب افقی

$$\text{مجانِب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$x=0 \Rightarrow y=0 \text{ و } y'_x = \frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2} > 0$$

مسئله ۲. در تابع باضابطه‌ی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر نمودار تابع

از مبدأ مختصات بگذرد و نقطه‌ی $O'(1,2)$ مرکز تقارن نمودار تابع باشد، معادله‌ی تابع را بیایید.

حل:

$$O(0,0) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} \frac{b}{d} \Rightarrow b=0$$

$$\text{مجانِب افقی: } y = \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2c$$

$$\text{مجانِب قائم: } x = -\frac{d}{c} = 1 \Rightarrow d = -c$$

$$\text{و } c \neq 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y = \frac{2cx+0}{cx-c} \Rightarrow y = \frac{2cx}{c(x-1)}$$

رسم نمودار تابع‌های باضابطه‌ی مثلثاتی

الف) معادله‌ی $y'_x = 0$ را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را در بازه‌ی داده شده محاسبه می‌کنیم.

ب) مختصات نقاط تقاطع نمودار تابع را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم و پس از تکمیل آن، نمودار تابع را در بازه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

مسئله: مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

$$1) y = \sin^2 x - \sin x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$y'_x = 2 \cos x \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$



اعداد جالب ریاضی

$$102 \times 102 = 10404$$

$$201 \times 201 = 40401$$

$$103 \times 103 = 10609$$

$$301 \times 301 = 90601$$

$$103^2 = 10609$$

$$301^2 = 90601$$

$$112^2 = 12544$$

$$211^2 = 44521$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$113^2 = 12769$$

$$311^2 = 96721$$

$$122^2 = 14884$$

$$221^2 = 48841$$

$$157^2 = 24649$$

$$158^2 = 24964$$

$$913^2 = 833569$$

$$914^2 = 835396$$

$$1^2 + 5^2 + 3^2 = 35$$

$$3^2 + 7^2 + 0^2 = 50$$

$$3^2 + 7^2 + 1^2 = 59$$

$$4^2 + 0^2 + 7^2 = 65$$

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 84^2 + 35^2 + 26^2$$

به مربع اعداد هم توجه کنید.

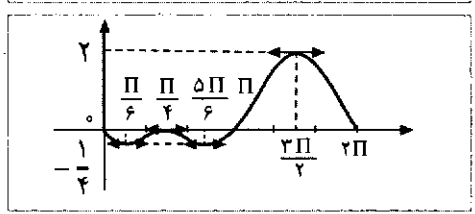
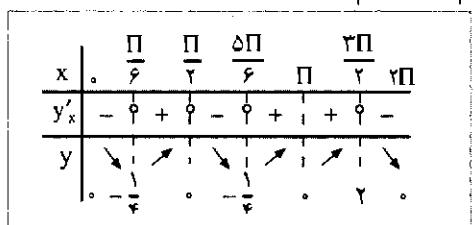
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ یا } 2\pi \Rightarrow y = \sin^2 0 - \sin 0 = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \sin = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$



$$2) y = \cos^2 x + \cos x - 2 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$y'_x = -2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow -\sin x (2\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi,$$

$$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$x = 0 \text{ یا } 2\pi \Rightarrow y = \cos^2 0 + \cos 0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$y = 0 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -2 \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

