

اشاره:
در شماره گذشته رسم نمودار توابع
چند جمله‌ای و مثلثاتی را بررسی کردیم، اینک به
رسم نمودار توابع کسری می‌پردازیم. بهتر است
قبل از مطالعه این مقاله، قسمت اول را از
شماره‌ی قبل مطالعه کنید.



رسم نمودار تابع بدوی مشتقی

(قسمت ۲)

رسم نمودار تابع $\frac{1}{f}$ از روی تابع f

الف) جهت حرکت f و $\frac{1}{f}$ خلاف یکدیگرند.

ب) همواره مقادیر f و $\frac{1}{f}$ هم علامت اند.

پ) اگر نقطه‌ی $M|_{f(a)}^a$ نقطه‌ی می‌نیم (ماکزیمم) تابع f

باشد، نقطه‌ی $M|_{\frac{1}{f(a)}}^a$ نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیم) تابع $\frac{1}{f}$

است.

ت) هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{f}$ در $x = a$ مجانب

قائم دارد.

ث) اگر $y = b$ مجانب افقی تابع f باشد، آن‌گاه $y = \frac{1}{b}$

مجانب افقی تابع $\frac{1}{f}$ است.

● مجتبی رفیعی

دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

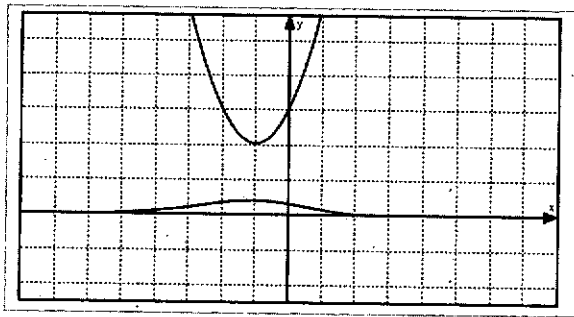
ج) اگر در اثر میل x به سمت بی‌نهایت، تابع y نیز به سمت

بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه $y = \frac{1}{f}$ دارای مجانب افقی به

معادله‌ی $y = 0$ است.

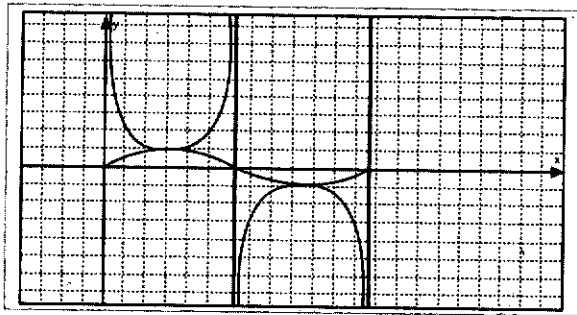
چ) اگر تابع f در یک بازه صفر شود، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ در آن

بازه تعریف نمی‌شود.



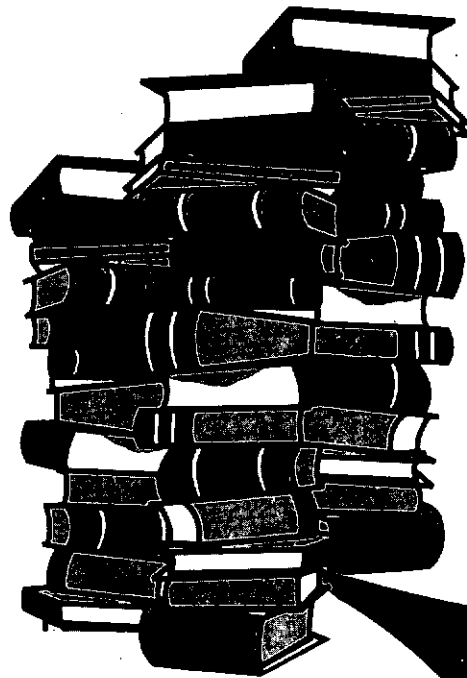
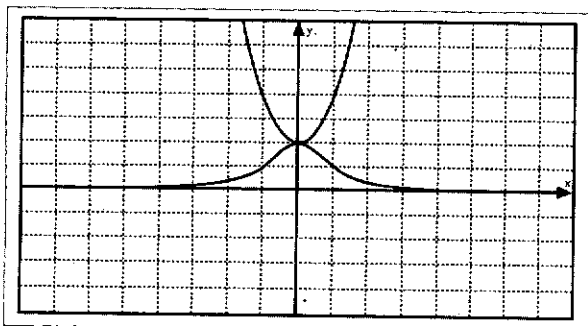
$$۲) y = \frac{1}{\sin x}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در نقاط $x = k\pi$ محور x ها را قطع می کند.
گام دوم: طبق قسمت های الف، ب و پ، نمودار به این صورت است.



$$۳) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 1$ را رسم می کنیم که رأس آن $|S|$ است.
گام دوم: طبق قسمت های الف، ب و پ نمودار به این صورت است.



ج) محل تقاطع f و $\frac{1}{f}$ در صورت وجود، روی خطوط

$$y = \pm 1 \text{ است (زیرا } f = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \pm 1 \text{).}$$

نمودار توابع ذیل را رسم کنید:

$$۱) y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$$

گام اول: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 2x + 3$ را رسم می کنیم.

گام دوم: طبق قسمت ج $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

گام سوم: طبق قسمت پ $M' \Big|_{-\frac{1}{2}}$ ماکزیمم تابع $\frac{1}{f}$ است.

گام چهارم: طبق قسمت الف دو تابع f و $\frac{1}{f}$ جهت حرکتشان مخالف یکدیگر است و طبق قسمت ب بالای محور x ها قرار دارند.

نمودار توابع کسری زیر را رسم کنید:

$$2) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x}$$

گام اول: مجانب های تابع را بررسی می کنیم:

- مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم. این صورت نقاط $x=0$ و $x=2$ مجانب قائم منحنی هستند.
- $y=1$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} = 1$$

- چون درجه ی صورت با مخرج برابر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

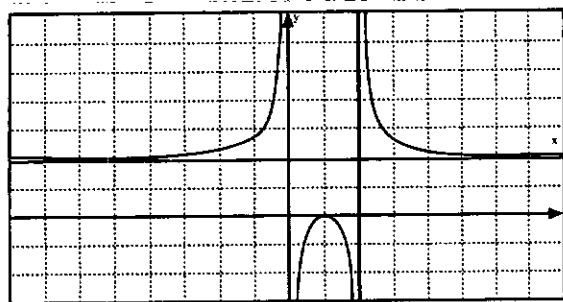
گام دوم: با حل $f(x)=0$ عامل $(x-1)^2$ به دست می آید که با توجه به نکته ی ۳ (مقاله ی شماره ی قبل)، نقطه ی $x=1$ ریشه ی مضاعف دارد و مماس بر محور x هاست. که منحنی در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد، زیرا: اگر در معادله ی

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \frac{1}{\underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)}}$$

در تابع $g(x)$ مقدار ۱ را قرار دهیم، داریم:

$$g(1) = \frac{1}{(1)^2 - 2(1)} = -1 < 0$$

گام سوم: با توجه به این که مجانب های قائم منحنی ریشه های ساده ی مخرج هستند، بنابراین دو طرف مجانب ها انفعال ساده داریم. (یک شاخه مثبت بی نهایت و دیگری منفی بی نهایت)



نمودار تابع بالا را به روش $\frac{1}{f}$ نیز می توان رسم کرد.

$$1) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

گام اول: مجانب های تابع را بررسی می کنیم:

- چون مخرج ریشه ندارد، بنابراین منحنی فاقد مجانب قائم است.

- $y=0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y=0$$

- چون درجه ی صورت از مخرج کمتر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

گام دوم: با حل $f(x)=0$ مقدار $x=0$ به دست می آید که طبق نکته ی ۱ (مقاله ی شماره ی قبل) ریشه ی ساده ی منحنی است، زیرا:

$$y = x \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2} \right)}_{g(x)}$$

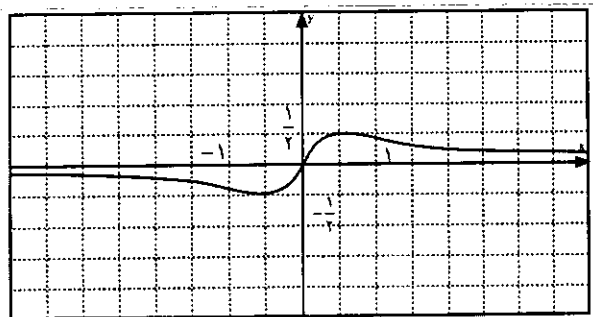
گام سوم: برای رسم نمودار این تابع، دو نقطه ی دلخواه در دو طرف ریشه ی ساده ی $x=0$ ، انتخاب می کنیم و در تابع اصلی قرار می دهیم:

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{1 + (-1)^2} = \frac{-1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین منحنی از دو نقطه ی $A(-1, -\frac{1}{2})$ و $B(1, \frac{1}{2})$ در

ناحیه ی سوم و ناحیه ی اول عبور می کند. یعنی: منحنی از منفی بی نهایت و پایین مجانب افقی $y=0$ شروع می شود و باید با عبور از نقطه ی A، در ناحیه ی سوم دارای یک می نیم شود و نقطه ی $(0,0)$ را قطع کند و سپس با عبور از نقطه B در ناحیه ی اول، دارای یک ماکزیمم شود و به سمت مثبت بی نهایت و بالای مجانب افقی $y=0$ ادامه پیدا کند.



۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم. در این صورت نقطه ی $x=1$ مجانب قائم منحنی است.
۲. تابع فاقد مجانب افقی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

۳. معادله ی منحنی را با استفاده از تقسیم چند جمله ای ها،

$$y = x - 1 + \frac{5}{x+1}$$

به صورت $y = x - 1 + \frac{5}{x+1}$ می نویسیم که با توجه به نکته ی ۷

(مقاله ی شماره ی قبل)، دارای مجانب مایل $y = x - 1$ است.

گام دوم: تابع $f(x) = 0$ ریشه ندارد. بنابراین منحنی محور x ها را قطع نمی کند. یعنی دارای دو اکسترم نسبی است.

گام سوم: چون مجانب قائم منحنی برابر ۱ و مجانب مایل آن برابر $y = x - 1$ است، آن ها را رسم می کنیم. با توجه به این که منحنی محور x ها را قطع نمی کند، نمودار آن بین دو مجانب در بالا و پایین قرار می گیرد.

$$3) f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

گام اول: مجانب های تابع را بررسی می کنیم:

۱. مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم. در این صورت $x=0$ مجانب قائم منحنی است.

۲. $y=0$ مجانب افقی منحنی است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 0$$

۳. چون درجه ی صورت از مخرج کوچک تر است، منحنی فاقد مجانب مایل است.

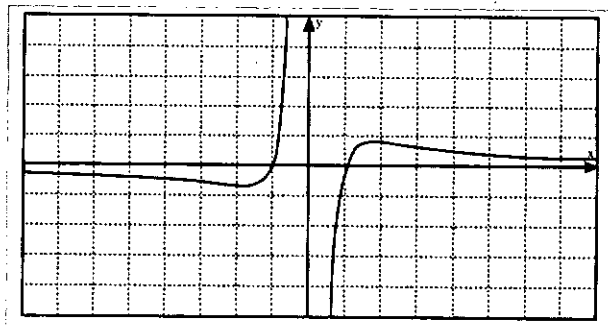
گام دوم: با حل معادله ی $f(x) = 0$ ، ریشه های ساده ی $x=1, x=-1$ به دست می آیند.

گام سوم: تابع در مجانب قائم خود دارای انفصال ساده است که برای رسم نمودار، دو نقطه ی دلخواه یکی بزرگ تر از ۱ و دیگری کوچک تر از -۱ در تابع قرار می دهیم. داریم:

$$f(2) = \frac{(2)^2-1}{(2)^2} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{در ناحیه ی اول}$$

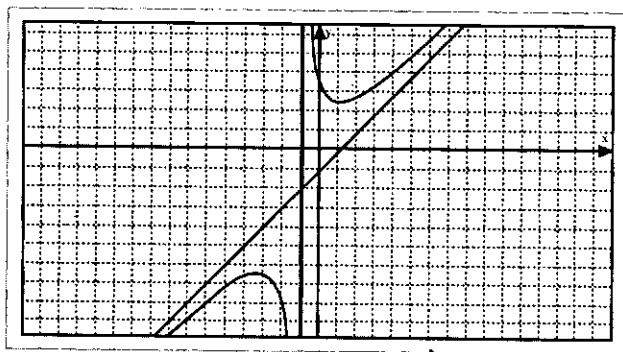
$$f(-2) = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^2} = \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{در ناحیه ی سوم}$$

اکنون با توجه به مجانب ها و محل تقاطع منحنی با محور x ها داریم:



$$4) f(x) = \frac{x^2+4}{x+1}$$

گام اول: مجانب های تابع را بررسی می کنیم:



تمرین: نمودار توابع با ضابطه های زیر را رسم کنید.

$$1) y = \frac{1}{x^2-3x^2} \quad 4) y = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$$

$$2) y = \frac{-2x}{1-x} \quad 5) y = \frac{4}{x^2+3}$$

$$3) y = \frac{x^2+2x-2}{x-1} \quad 6) y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

توجه: برای رسم دقیق نمودارها می توانید از نرم افزار Graphmatica استفاده کنید (از سایت زیر می توانید آن را دانلود کنید، <http://www.graphmatica.com>).