

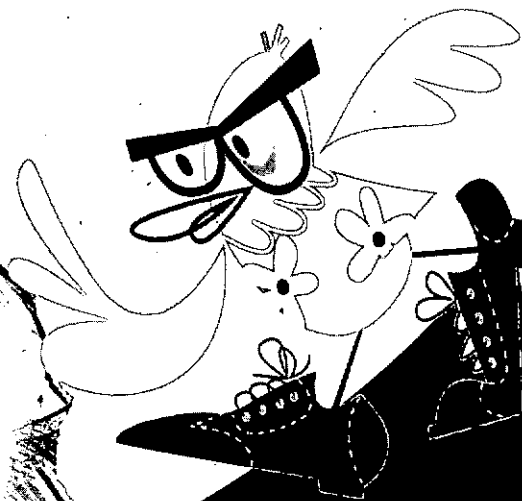
اشاره

نمودارها می‌توانند درک شهودی ما را نسبت به مطالب ریاضی عمیق‌تر کنند. یکی از روش‌هایی که می‌تواند درک ریاضی را در دانش‌آموزان بالا ببرد، استفاده از قوه‌ی درک و شهود است و اگر قوه‌ی درک و شهود در دانش‌آموزان تحریک و تقویت شود، تفکر دانش‌آموزان رشد می‌یابد و شکوفا می‌شود. در نتیجه، انگیزه به یادگیری ریاضیات، قدرت ابتکار و خلاقیت دانش‌آموزان افزایش می‌یابد.

با کمک اطلاعاتی که از تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به دست می‌آید، می‌توان نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کرد. اما ممکن است تعیین مشتق در بعضی از موارد به سادگی امکان‌پذیر نباشد. اکنون می‌خواهیم روش رسم نمودار تابع را بدون استفاده از مشتق بررسی کنیم.



رسم نمودار تابع بدون مشتق



● مجتبی رفیعی

دبیر ریاضی منطقه‌ی شهر قدس

(قسمت ۱)

۳۵

دوره‌ی شانزدهم / شماره‌ی ۴ تابستان ۱۳۹۶

و محل تقاطع منحنی با محور x هاست.

۲. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $n \geq 2$ و

$g(a) \neq 0$ ، مقدار مشتق تابع در $x = a$ تا مرحله‌ی $(n-1)$ ام

برابر صفر است. یعنی: $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$

به طور کلی، برای رسم نمودار توابع، به این نکات نیاز

داریم:

۱. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a) \neq 0$ اگر

$n = 1$ باشد، آن‌گاه $x = a$ ریشه‌ی ساده‌ی منحنی تابع f است

می کند.

طبق نکته ی ۱، منحنی در نقطه ی $x = 1$ محور x ها را قطع

می کند.

طبق نکته ی ۳، منحنی در نقطه ی $x = 2$ بر محور x ها

مماس است و این نقطه می نیمم نسبی است. زیرا می توان نوشت:

$$f(x) = (x-2)^2 \underbrace{[(x-1)(x+1)]}_{g(x)}$$

۳. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a) \neq 0$ ، اگر n زوج و $n \geq 2$ باشد، آن گاه f در $x = a$ دارای اکسترمم نسبی است. در این حالت، اگر $g(a) > 0$ باشد، تابع در a می نیمم نسبی دارد و اگر $g(a) < 0$ باشد، تابع در a ماکزیمم نسبی دارد.

۴. در تابع $f(x) = (x-a)^n g(x)$ با شرط $g(a) \neq 0$ ، اگر n فرد و $n \geq 3$ باشد، آن گاه f در $x = a$ دارای نقطه ی عطف مماس است.

۵. خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوئیم، هرگاه حداقل یکی از موارد زیر برقرار باشد:

$$۲) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$۱) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

۶. خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار تابع f

گوئیم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

اکنون اگر عامل

صفرشونده یعنی $(x-2)^2$ را

حذف کنیم و به جای x عدد ۲ را

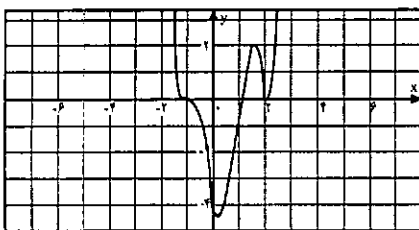
در $g(x)$ قرار دهیم، داریم:

$$g(2) = (2-1)(2+1)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18 > 0$$

طبق نکته ی ۴، منحنی در نقطه ی

$x = 1$ دارای نقطه ی عطف مماس

است.



(نمودار ۱)

رسم نمودار توابع کثیر الجمله ای

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$۱) y = x^4 - 2x^2$$

گام اول: چون

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 - 2x^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = +\infty$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

یعنی:

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

۷. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ و $f(x) = mx + h + R(x)$

آن گاه $y = mx + h$ مجانب مایل $y = f(x)$ است.

مثال: معادله ی $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x+1)^3 = 0$ را

به طور شهودی رسم کنید؟

این معادله سه ریشه دارد که محور x ها را با شرایط زیر قطع

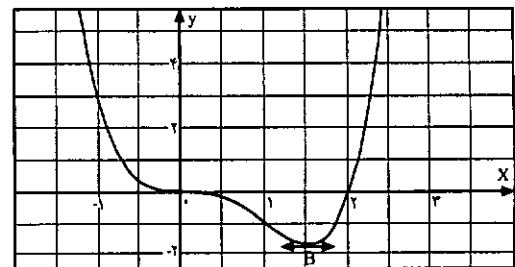
بنابراین، شروع منحنی از ناحیه ی دوم و پایان منحنی در ناحیه ی اول است.

گام دوم: معادله ی $y = 0$ را حل می کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور x ها به دست آید.

$$y = x^4 - 2x^2 = x^2(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

نقطه ی $x = 0$ ریشه ی مرتبه ی فرد معادله است، پس نقطه ی عطف مماس منحنی است و نقطه ی $x = 2$ ریشه ی ساده ی منحنی است و این نقطه ها محل تقاطع منحنی با محور x ها است.

گام سوم: منحنی از ناحیه ی دوم به صورت نزولی شروع می شود و باید در نقطه ی صفر عطف مماس داشته باشد و چون باید نقطه ی $x = 2$ را روی محور x ها قطع کند، بنابراین در یک نقطه مانند B (نمودار ۲) می نیمم دارد که از این نقطه به بعد، نمودار منحنی صعودی است و با عبور از نقطه ی $x = 2$ در ناحیه ی اول ادامه پیدا می کند.



(نمودار ۲)

$$2) \quad y = -x(x-2)^2$$

گام اول: چون

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x(x-2)^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^3 = \mp\infty$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

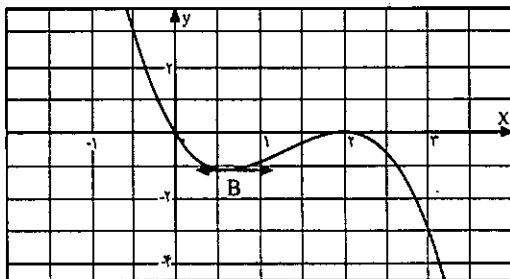
یعنی:

بنابراین، منحنی از ناحیه ی دوم شروع می شود و در ناحیه ی چهارم پایان می یابد.

گام دوم: معادله ی $y = 0$ را حل می کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور x ها به دست آید.

$$y = -x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ریشه ی ساده} \\ x = 2 & \text{ریشه ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه های به دست آمده، منحنی از نقطه ی صفر می گذرد و در نقطه ی ۲ بر محور x ها مماس می شود. گام سوم: منحنی از ناحیه ی دوم نزول می کند و چون نقطه ی $x = 0$ ریشه ی ساده است، آن را قطع می کند و باید در نقطه ی $x = 2$ بر محور x ها مماس شود. پس در نقطه ای مانند B (نمودار ۳) می نیمم پیدا می کند تا در نقطه ی $x = 2$ بر محور x ها مماس شود.



(نمودار ۳)

$$3) \quad y = x^2(x-2)^2$$

گام اول:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2(x-2)^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^6 = \pm\infty$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

یعنی:

بنابراین شاخه ای از منحنی در ناحیه ی اول و شاخه ی دیگری از آن در ناحیه ی سوم قرار دارد.

گام دوم: معادله ی $y = 0$ را حل می کنیم تا محل تقاطع منحنی با محور x ها به دست آید.

$$y = x^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{نقطه ی عطف مماس} \\ x = 2 & \text{ریشه ی مضاعف} \end{cases}$$

که با توجه به ریشه های به دست آمده، منحنی در نقطه ی $x = 0$ عطف مماس دارد و در نقطه ی $x = 2$ بر محور x ها مماس می شود.

گام سوم: منحنی از ناحیه ی چهارم صعود می کند و در نقطه ی $x = 0$ عطف مماس دارد و سپس در نقطه ای مانند B (نمودار ۴) ماکزیمم پیدا می کند و در نقطه ی $x = 2$ بر منحنی مماس می شود.

$$x^2 - ax + a = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

۳. اگر $f(x) = x^2 - 1$ ، نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ با محور x ها کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری-۸۳)

- (۱) یک نقطه تلاقی - دو نقطه تماس
 - (۲) دو نقطه تلاقی - یک نقطه تماس
 - (۳) سه نقطه تلاقی - فاقد نقطه تماس
 - (۴) فاقد نقطه تلاقی - دو نقطه تماس
- جواب: گزینه ۲ صحیح است، زیرا:

$$f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ریشه مضاعف
ریشه ساده

۴. ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 - 2x + 1 = 0$ چگونه‌اند؟ (سراسری-۸۳)

- (۱) ریشه مضاعف مثبت - یک ریشه منفی
 - (۲) ریشه مضاعف منفی - یک ریشه مثبت
 - (۳) یک ریشه مثبت - دو ریشه منفی
 - (۴) دو ریشه مثبت - یک ریشه منفی
- جواب: گزینه ۴ صحیح است، زیرا

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

در این صورت $x=1$ یک ریشه ساده مثبت و معادله

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

یک ریشه ساده مثبت و یک ریشه ساده منفی دارد. در این صورت، معادله دارای دو ریشه ساده مثبت و یک ریشه ساده منفی است.

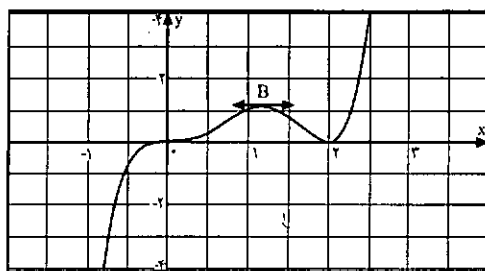
رسم نمودار توابع مثلثاتی

تذکر: توابع مثلثاتی را در دوره‌ی تناوبشان رسم می‌کنیم. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$۱) y = \sin^2 x$$

گام اول: چون تابع $y = \sin x$ از درجه‌ی دوم است، بنابراین ریشه‌های معادله $\sin x = 0$ نقاط مماس بر محور x ها هستند. یعنی:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$



(نمودار ۴)

آزمون‌ها

۱. به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی

$$x = \left(\frac{1}{4}x + a\right)(x^2 - 4)$$

بر محور x ها در یک نقطه مماس است؟ (سراسری-۸۴)

$$\phi(1) \quad (2) \quad \{1\}$$

$$\phi(3) \quad (4) \quad \{-2, 2\}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. زیرا برای این که منحنی بر محور x ها مماس باشد، باید معادله‌ی

$$y = \left(\frac{1}{4}x + a\right)(x^2 - 4) = \left(\frac{1}{4}x + a\right)(x-2)(x+2) = 0$$

ریشه مضاعف داشته باشد. بنابراین، ریشه‌های

$$\frac{1}{4}x + a = 0 \quad (x-2)(x+2) = 0$$

صدق کنند تا یکی از ریشه‌ها مضاعف شوند.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}(2) + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{4}(-2) + a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۲. منحنی به معادله‌ی

$$y = (x-1)(x^2 - ax + a) = 0$$

محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه

مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری-۸۳)

$$0 < a < 2 \quad (2) \quad -4 < a < 0 \quad (1)$$

$$a > 4 \quad (4) \quad 0 < a < 4 \quad (3)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. با توجه به نکات ذکر

شده، معادله $x^2 - ax + a = 0$ نباید ریشه داشته باشد، زیرا در غیر این صورت ممکن است یا ریشه مضاعف یا نقطه‌ی عطف یا نقطه‌ی تماس دیگری داشته باشد که با فرض در تناقض است.

گام دوم: می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بنابراین:

$$1) \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ \sin^2 x \leq \sin x \end{cases}$$

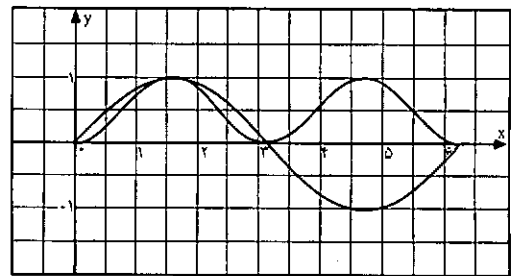
$$2) \quad -1 \leq \sin x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

گام سوم: اگر $0 \leq x \leq \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \leq \sin x \leq 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^2 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد (در آن سه

نقطه با هم برابرند).

گام چهارم: چون دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin^2 x$ برابر $T = \pi$ است، بنابراین در بازه‌ی $\pi \leq x \leq 2\pi$ نمودار تابع $y = \sin^2 x$ همان نمودار بازه‌ی $0 \leq x \leq \pi$ است (نمودار ۵).



(نمودار ۵)

$$2) \quad y = \sin^3 x$$

گام اول: چون توان $\sin x$ برابر ۳ است، بنابراین ریشه‌های $\sin x$ نقاط عطف مماس منحنی هستند. یعنی:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

گام دوم: می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ که:

$$1) \quad -1 \leq \sin x \leq 0 \Rightarrow \sin^3 x \geq \sin x$$

$$2) \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin^3 x \leq \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \leq x \leq \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \leq \sin x \leq 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی

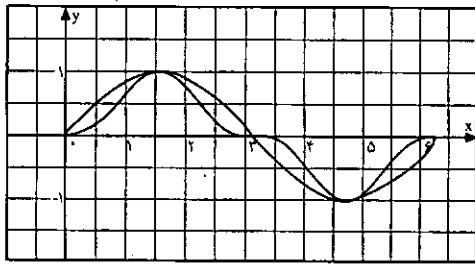
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد (در آن سه

نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \leq x \leq 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \leq \sin x \leq 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sin^3 x$ ، غیر از سه نقطه‌ی

$x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد (در آن سه

نقطه با هم برابرند) (نمودار ۶).



(نمودار ۶)

$$3) \quad y = \sqrt[3]{\sin x}$$

گام اول: ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ مشخص و سپس به کمک آن نمودار $y = \sqrt[3]{\sin x}$ را رسم می‌کنیم.

گام دوم: می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بنابراین:

$$1) \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \geq \sin x$$

$$2) \quad -1 \leq \sin x \leq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin x} \leq \sin x$$

گام سوم: اگر $0 \leq x \leq \pi$ باشد، آن‌گاه $0 \leq \sin x \leq 1$ است. در این صورت نمودار $y = \sqrt[3]{\sin x}$ ، غیر از سه نقطه‌ی

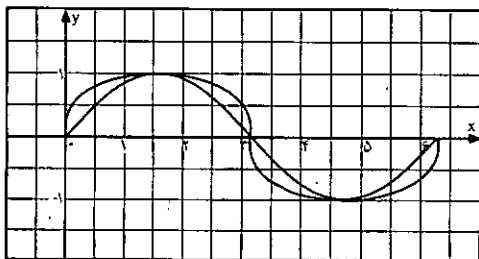
$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ، پایین‌تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد (در آن سه

نقطه با هم برابرند).

اگر $\pi \leq x \leq 2\pi$ باشد، آن‌گاه $-1 \leq \sin x \leq 0$ است. در این صورت نمودار $y = \sqrt[3]{\sin x}$ ، غیر از سه نقطه‌ی

$x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ، بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد (در آن سه

نقطه با هم برابرند) (نمودار ۷).



(نمودار ۷)

تمرین: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$1) \quad y = x^2(x-2)^2$$

$$4) \quad y = \sqrt{\tan x}$$

$$2) \quad y = x^9 + x^7$$

$$5) \quad y = \sin^2 x - \sin x$$

$$3) \quad y = x^4 - 2x^2$$

$$6) \quad y = x \cdot \sin$$