

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f

نقطه ی اکسترمم تابع f' :

$$U'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

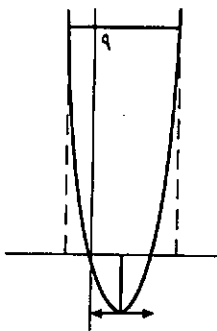
$$U(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$$

طول های اکسترمم تابع f برابرند با طول های نقاط تقاطع

تابع f' با محور x ها:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$U'(x)$		-	-	0	+	+	+
$U(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$+\infty$



۱. به طوری که ملاحظه شد، $x = 2$ و $x = 0$ طول های

نقاط اکسترمم منحنی تابع f هستند که برابر طول های نقاط

تقاطع منحنی تابع f' با محور x هایند. پس می توان گفت:

نتیجه ی ۱. طول های نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر

است با طول های نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور

x ها؛ به شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f ،

$f'(x)$ مساوی صفر باشد.

ابتدا در توابع کثیر الجمله، رابطه ی بین منحنی تابع f و

منحنی تابع f' را به صورت شهودی بررسی و سپس نتایج را بیان می کنیم.

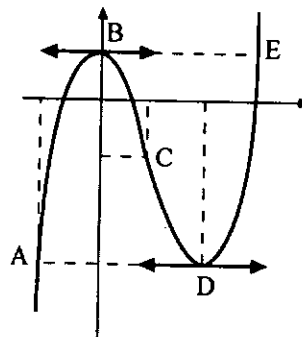
مثال: تابع f به معادله ی $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را رسم می کنیم.

طول های اکسترمم تابع f :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

طول نقطه ی عطف تابع f $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$+\infty$
		A	B	C	D	E	



حال تابع f' به معادله ی $U(x) = f'(x) = 3x^2 - 6x$

رسم می کنیم. طول نقطه ی عطف تابع f برابر است با طول

۲. اگر کمی توجه کنیم، درمی یابیم که طول نقطه ی عطف تابع f برابر ۱ است. از طرف دیگر، طول نقطه ی اکسترمم منحنی تابع f' برابر ۱ است. پس می توان گفت:

نتیجه ی ۲. طول های نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طول های نقاط اکسترمم منحنی تابع f' .

۳. به طوری که در شکل تابع f ملاحظه می شود، تقعر قطعه ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس y'' تابع f در فاصله ی طول های نقاط A و C یعنی در فاصله ی $[-1, 1]$ منفی است. از طرف دیگر، y'' تابع f همان U' است. پس U' در این فاصله منفی و بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

نتیجه ی ۳. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله ی $[a, b]$ به سمت پایین (جهت منفی محور y ها) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴. هم چنین می توان گفت که تقعر قطعه ی منحنی CDE در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور y ها) است. پس y'' در فاصله ی طول های نقاط C و E یعنی در فاصله ی $[1, 3]$ مثبت است. از طرف دیگر، y'' همان U' است. پس U' در این فاصله مثبت و در نتیجه، تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

نتیجه ی ۴. اگر تقعر منحنی تابع f در فاصله ی $[c, d]$ به سمت بالا (جهت مثبت محور x ها) باشد، منحنی f'' در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵. باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه ی منحنی AB اکیداً صعودی است. یعنی تابع f در فاصله ی طول های این دو نقطه یعنی فاصله ی $[-1, 0]$ اکیداً صعودی است. پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است؛ یعنی: $f' \geq 0$. بنابراین: $U(x) \geq 0$ و در نتیجه نمودار تابع $U(x)$ در فاصله ی $[-1, 0]$ بالای محور x ها یا روی محور x ها است.

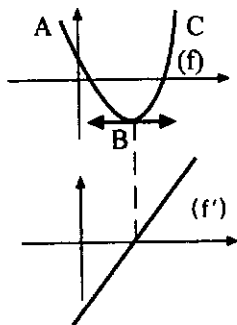
نتیجه ی ۵. اگر منحنی تابع f در فاصله ی $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، آن گاه عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله بالای محور x ها یا روی محور x ها است.

۶. منحنی تابع f روی قطعه منحنی BCD اکیداً نزولی است. پس تابع f در فاصله ی طول های نقاط D و B ، یعنی فاصله ی $[0, 2]$ ، اکیداً نزولی است و عبارت $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است، در این فاصله زیر محور x ها یا روی محور x ها است.

نتیجه ی ۶. اگر منحنی تابع f در فاصله ی $[b, c]$ اکیداً نزولی باشد، آن گاه $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین، نمودار f' در این فاصله پایین محور x ها یا روی محور x ها است.

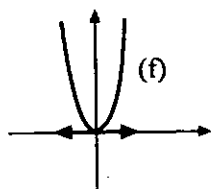
اکنون با توجه به شش نتیجه ی فوق تمرین های زیر را حل می کنیم. در مثال های زیر سعی شده است، محور y ها در دو نمودار تابع f و f' در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره گیری شود.

مثال ۱. فرض می کنیم نمودار یک تابع درجه ی دوم به صورت شکل زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می کنیم.

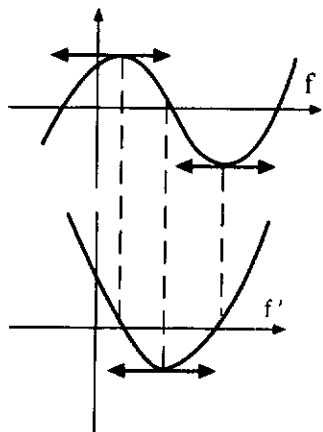


توضیح: تقعر منحنی f به طرف بالاست؛ پس تابع f' اکیداً صعودی است و طول نقطه ی B (نقطه ی مینی مم تابع f) برابر طول نقطه ی تقاطع منحنی f' با محور x ها است. با توجه به این که تابع درجه ی دوم است، مشتق آن تابعی از درجه ی اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

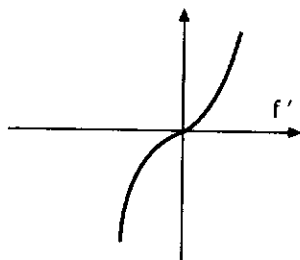
مثال ۲. فرض می کنیم تابع f به معادله ی $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ، $f(x) = x^{2n}$ باشد. نمودار این تابع به صورت زیر است:



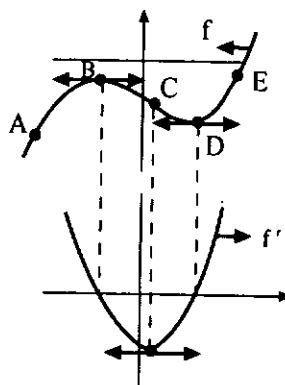
مثال ۵. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



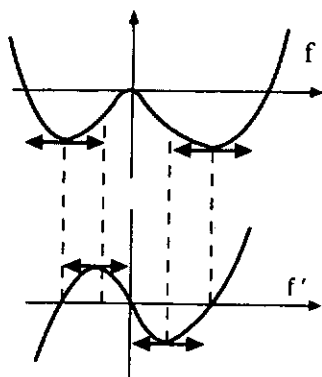
تابع f' به صورت یک منحنی و اکیداً صعودی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد.



مثال ۳. فرض می‌کنیم نمودار تابع f به صورت زیر باشد. با توجه به مطالب گفته شده، نمودار f' نموداری است که زیر نمودار تابع f آمده است.



مثال ۶. نمودار تابع f به صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.



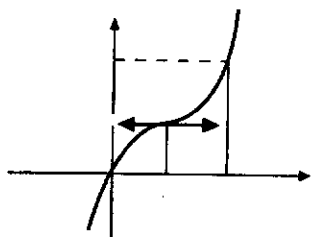
توضیح: طول‌های نقاط B و D برابر طول‌های نقاط تقاطع منحنی f' با محور x هاست. نقطه‌ی C ، نقطه‌ی عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع f' است.

۷. حال تابع f به معادله‌ی $f(x) = (x-1)^3 + 1$ را در نظر می‌گیریم. جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f = R$ و تابع در R پیوسته است.

$$f'(x) = 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

طول نقطه‌ی عطف تابع f = ریشه‌ی مضاعف $x = 1$

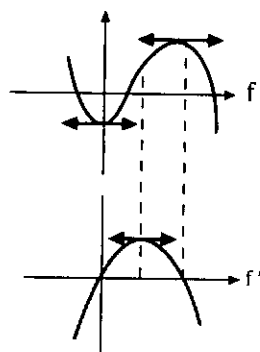
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$



تقریر قطعه‌ی منحنی ABC به طرف پایین است. پس منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط A و C اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه‌ی ۳) و تقریر قطعه‌ی منحنی CDE به طرف بالاست. بنابراین منحنی تابع f' در فاصله‌ی طول‌های نقاط C و E اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه‌ی ۴).

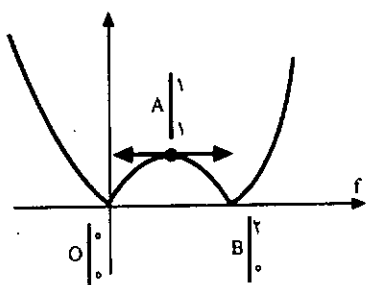
مثال ۴. نمودار

تابع f به صورت شکل مقابل است و نمودار مشتق آن زیر شکل منحنی f رسم شده است.

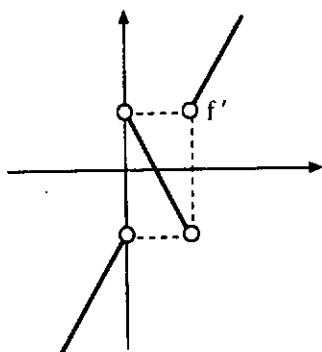


۸. تابع f به معادله $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نظر

می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است:

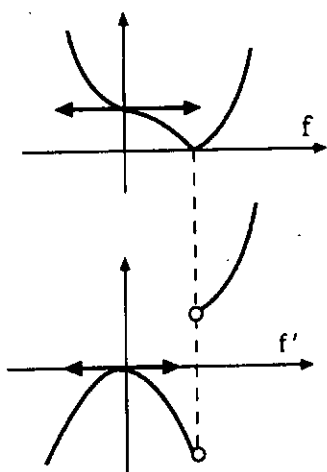


توجه: این تابع در نقطه A ماکزی می‌نسی است، لذا طول نقطه A برابر طول نقطه تقاطع منحنی f' با محور x هاست. این تابع در نقاط O و B مینی می‌نسی است، نظر به این که تابع f در نقاط O و B مشتق پذیر نیست، لذا تابع f' در نقاط به طول‌های (صفر و ۲) ناپیوسته است و در نتیجه نمودار تابع f' چنین است:



مثال ۸. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه

نمودار مشتق تابع f نموداری است که زیر آن آمده است:

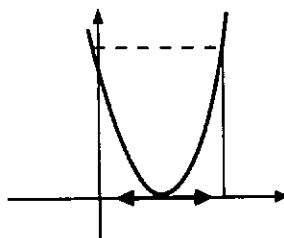


حال منحنی تابع f' به معادله $U(x) = 3(x-1)^2$ را در نظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه ی عطف تابع f = طول اکسترمم تابع f'

$$U'(x) = 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
U'	-	-	0	+	+
U	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$



توجه: $x = 1$ طول نقطه ی عطف تابع f است. پس بنابر

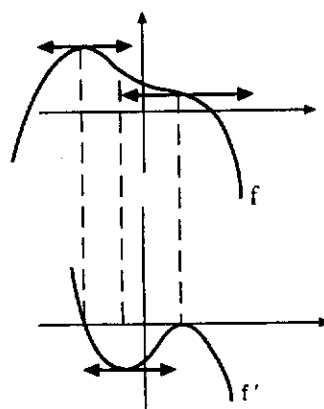
نتیجه ی ۲، $x = 1$ طول نقطه ی اکسترمم تابع f' است.

چون $x = 1$ ریشه ی مضاعف مشتق تابع f است، پس $x = 1$ طول نقطه ی عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه ی عطف موازی محور x هاست. بنابراین، ضریب زاویه ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از این جا نتیجه می‌گیریم که $x = 1$ طول نقطه ی اکسترمم تابع f' و عرض این اکسترمم صفر است.

نتیجه ی ۷. اگر $x = a$ طول نقطه ی عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور x ها باشد، آن‌گاه نقطه ی $M \Big|_a^a$ نقطه ی اکسترمم منحنی تابع f' است.

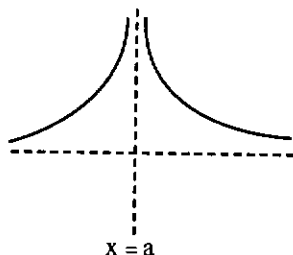
مثال ۷. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر شد، آن‌گاه

نمودار تابع مشتق، نموداری است که زیر منحنی تابع f رسم شده است.

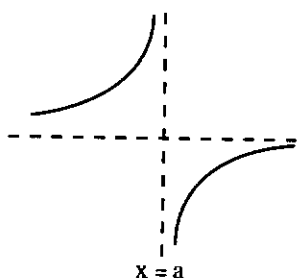


باشد، و $g(a), g'(a) \neq 0$ آن گاه خط $x = a$ ، معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال مضاعف» گوئیم.

$f(x) \rightarrow -\infty$ یا $f(x) \rightarrow +\infty$ اگر $x \rightarrow a$



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال مضاعف نمودار است.



در نمودار بالا خط $x = a$ انفصال ساده‌ی نمودار است.

۱۰. اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ داشته باشد (انفصال ساده)، آن گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ خواهد شد که $x = a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad g(a), g'(a) \neq 0$$

می‌دانیم که خط $x = a$ انفصال ساده‌ی تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) + g(x)}{(x-a)^n}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است. چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است، پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال ۱۰. اگر منحنی تابع f به صورت ذیل باشد، آن گاه منحنی تابع f' با توجه به مطالب گفته شده، به صورت نموداری است که آن را مقابل نمودار f می‌بینید.

$$9. \text{ تابع کسری به معادله‌ی } y = \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

در نظر می‌گیریم. این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله‌ی

$$y = \frac{a}{a'}$$

افقی به معادله‌ی $y = 0$ دارد؛ زیرا:

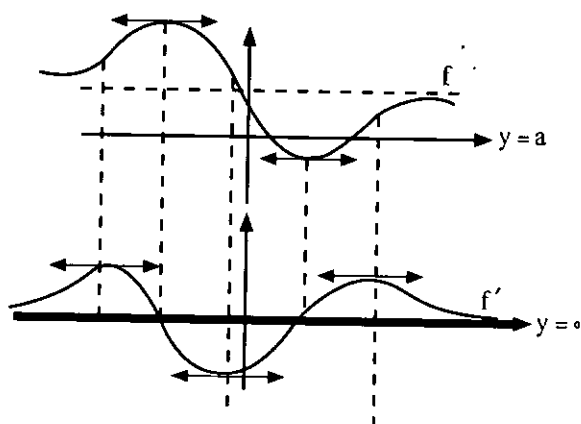
$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^n - a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^n}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b') - a'n(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تابع y' درجه‌ی مخرج بیشتر از درجه‌ی صورت است. بنابراین، اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن گاه $y' \rightarrow 0$. پس خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجه‌ی ۹. اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آن گاه خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f' خواهد بود.

مثال ۹. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، آن گاه نمودار تابع f' نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



توجه: منحنی تابع f سه نقطه‌ی عطف دارد. پس منحنی تابع f' سه اکسترمم دارد.

تذکر: اگر معادله‌ی تابع f به صورت

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad g(a), g'(a) \neq 0$$

خط $x = a$ معادله‌ی مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را «انفصال ساده» گوئیم.

اگر $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$

اگر معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

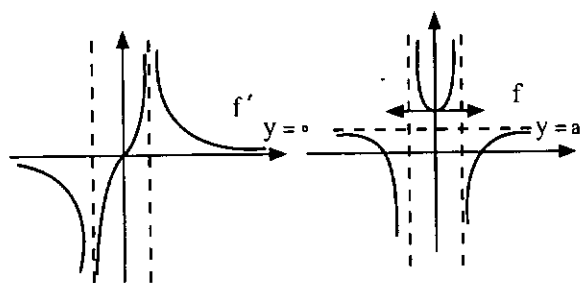
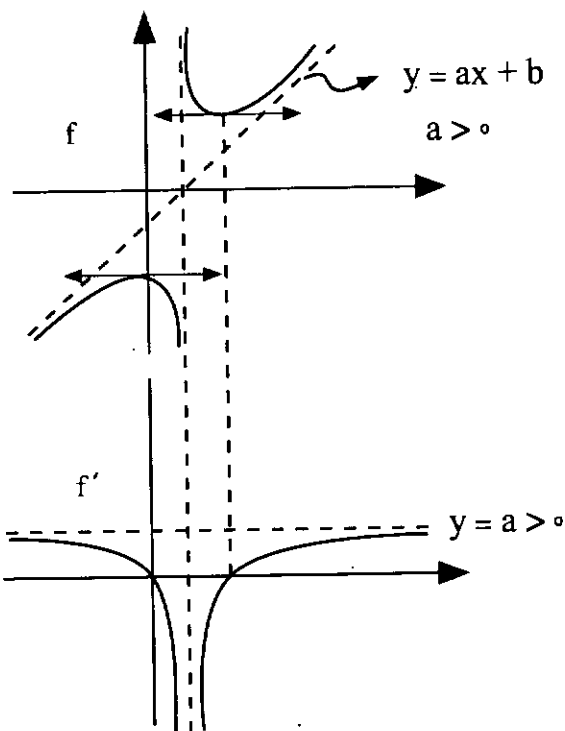
۱۲. اگر در توابع کسری، معادله‌ی مجانب مایل منحنی تابع به صورت $y = ax + b$ باشد، آن گاه منحنی تابع f' دارای مجانب افقی به معادله‌ی $y = a$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی تابع f به صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ و درجه‌ی $h(x)$ حداقل یک واحد بیشتر از درجه‌ی $g(x)$ باشد. اگر از معادله‌ی تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$f'(x) = a + \frac{g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

اگر درجه‌ی $g(x)$ ، n و درجه‌ی $h(x)$ ، $n+1$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، آن گاه درجه‌ی صورت کسر $f'(x)$ مساوی $2n$ و درجه‌ی مخرج آن $(2n+2)$ است. پس اگر $x \rightarrow \infty$ ، آن گاه حد کسر صفر می‌شود و حد $f'(x)$ در این حالت برابر با a است که همان مجانب افقی منحنی تابع f' است.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.



توضیح: مجانب‌های قائم به انفصال‌های مضاعف تبدیل شده‌اند. مجانب افقی تابع که به صورت $y = k > 0$ است، به $y = 0$ تبدیل شده است.

۱۱. اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به صورت $x = a$ و انفصال مضاعف تابع f باشد، آن گاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x = a$ است، ولی انفصال حاصل در منحنی f' ، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم معادله‌ی منحنی تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^n}$ ، $n \in \mathbb{N}$ و $g(a), g'(a) \neq 0$ باشد. پس:

منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود، اما پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - ng(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x-a)$ در تابع f' دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال ۱۱. اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، آن گاه منحنی تابع f' به صورت نموداری خواهد بود که زیر آن آمده است.

