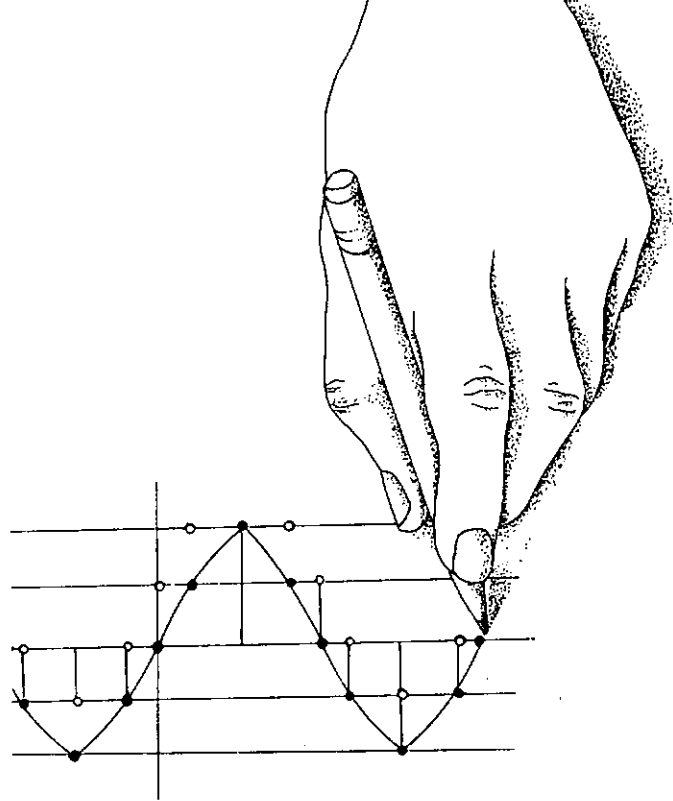


هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود، حرکت تناوبی است. جهان پر از حرکت‌های تناوبی است که از آن جمله می‌توان از نوسانهای رفاصک ساعت مچی، سیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر در حال نوسان، عقربه کوچک ساعت که بعد از طی دوازده ساعت دوباره مسیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مسیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند. در این مقاله توابع متناوبی را رسم می‌کنیم، که در فاصله‌های مساوی تکرار می‌شوند. چنان‌که خواهیم دید، توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول نمونه‌ای از این نوع توابع می‌باشند.



تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب گوئیم، هرگاه کوچکترین مقدار مثبتی مانند $T \neq 0$ موجود باشد، به طوری که برای هر x واقع در دامنه f ، $x \pm T$ نیز در دامنه f باشد و

$$f(x+T) = f(x)$$

در این صورت T را دوره تناوب تابع f می‌گوئیم.

مسئله: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \sin(ax + \beta)$ را به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f(x) \Rightarrow \sin[a(x+T) + \beta] \\ &= \sin(ax + \beta) \\ &\Rightarrow ax + aT + \beta = 2k\pi + ax + \beta \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow T = \frac{2k\pi}{a} \end{aligned}$$

کوچکترین مقدار مثبت T به ازای $k=1$ به دست می‌آید، چون $D_f = \mathbb{R}$ بدیهی است که اگر $x \in D_f$ آن‌گاه $x \pm T \in D_f$. بنابراین دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(ax + \beta)$ برابر است با $T = \frac{2\pi}{a}$. به طریق مشابه می‌توان بررسی کرد، که دوره تناوب تابع $f(x) = \cos(ax + \beta)$ به صورت $T = \frac{2\pi}{a}$ می‌باشد.

مرحله رسم منحنیهای توابع $f(x) = k\sin(ax + \beta) + L$ و $f(x) = k\cos(ax + \beta) + L$ که در آنها: $L \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $k \neq 0$ زاویه‌ای بر حسب رادیان می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده درباره تابع متناوب به سادگی درمی‌یابیم که توابعی به صورت بالا متناوب می‌باشند، بنابراین شکل آنها در فاصله‌های برابر به طور دقیق تکرار می‌شوند، لذا کافی است نمودار آنها را در فاصله $[0, T]$ رسم نماییم، سپس

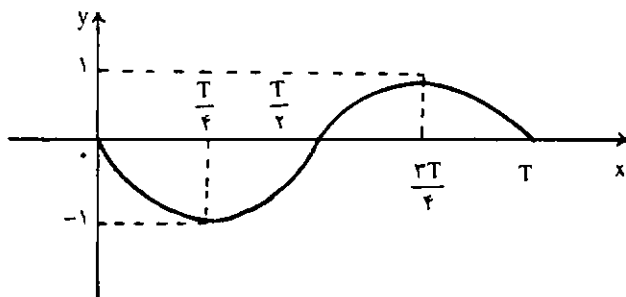
رسم منحنیهای

توابع سینوسی و کسینوسی درجه اول با روش نقطه‌یابی و انتقال

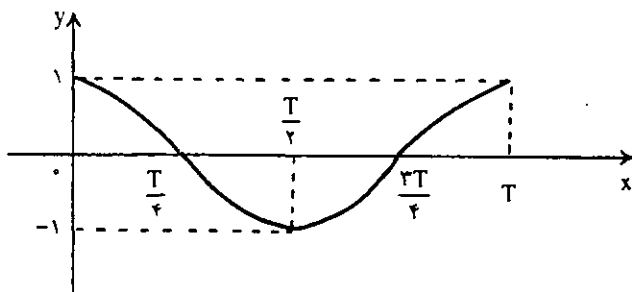
برای داوطلبان کنکور نظام جدید
و درس ریاضی ۳

• میرشهرام صدر

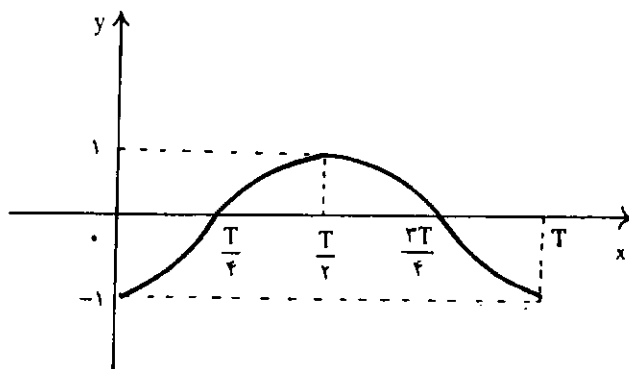
x	$\cdot$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = -\sin ax$	$\cdot$	-1	$\cdot$	1	$\cdot$



x	$\cdot$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = \cos ax$	1	$\cdot$	-1	$\cdot$	1

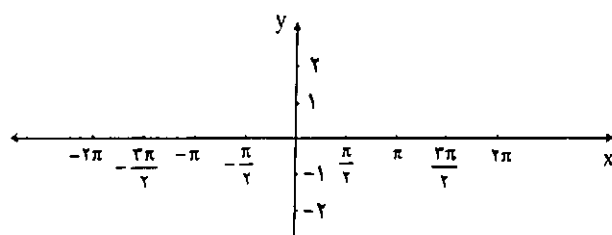


x	$\cdot$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = -\cos ax$	-1	$\cdot$	1	$\cdot$	-1



در فاصله‌های برابر با طول دوره تناوب شکل تابع را به‌طور دقیق تکرار کنیم، تا این‌که نمودار تابع در هر فاصله‌ای از صفحه مختصات مشخص باشد.
برای رسم شکل این نوع توابع مراحل زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

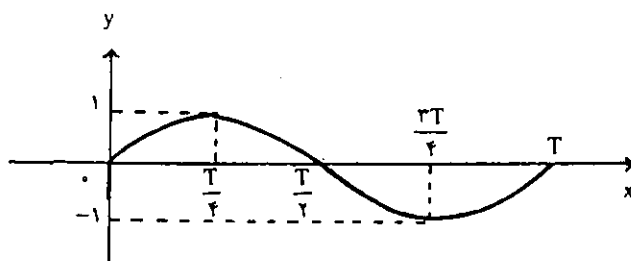
مرحله اول — در دستگاه مختصات xOy روی محور x ها π را تقریباً به اندازه سه واحد در نظر می‌گیریم، بنابراین $\frac{\pi}{4}$ را $1/5$ واحد و $\frac{3\pi}{4}$ را $4/5$ واحد و 2π را 6 واحد انتخاب می‌کنیم.



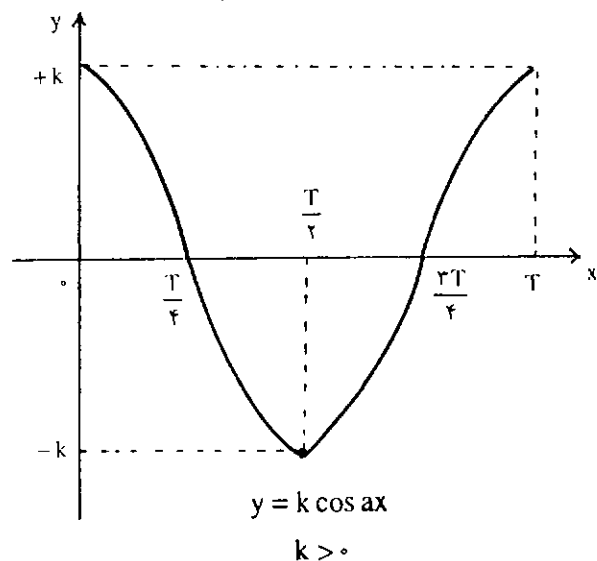
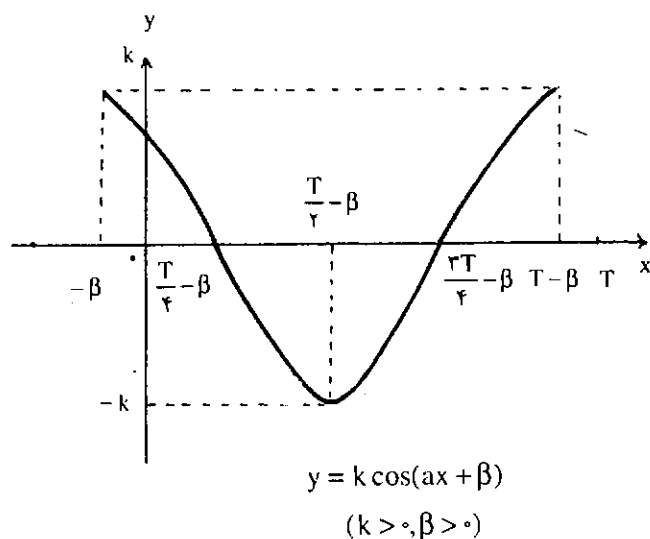
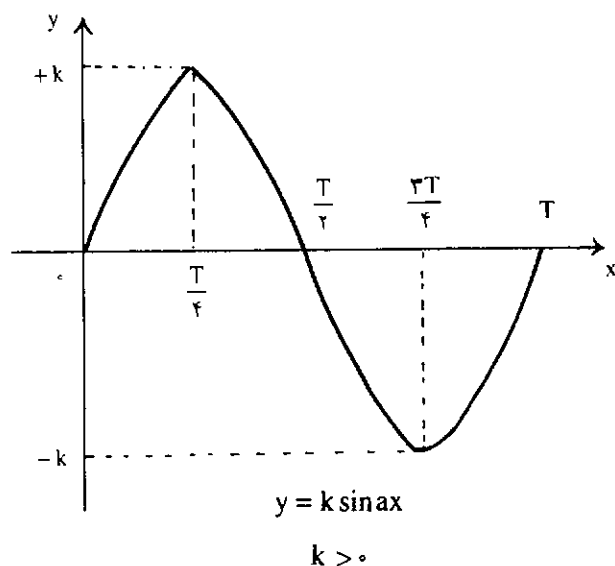
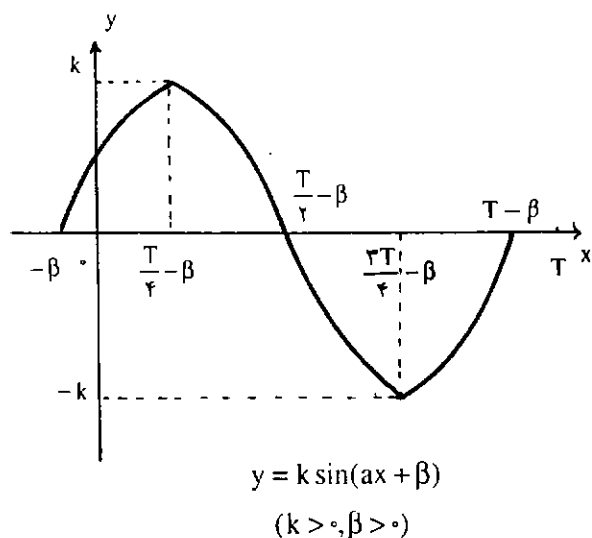
مرحله دوم — دوره تناوب تابع را با استفاده از فرمول $T = \frac{2\pi}{a}$ به‌دست می‌آوریم.

مرحله سوم — منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = \sin ax$ و $y = -\sin ax$ (یا $y = \cos ax$ و $y = -\cos ax$) را به کمک جدولهای زیر و با استفاده از روش نقطه‌یابی در ناحیه $[0, T]$ (دوره تناوب تابع است) رسم می‌کنیم.

x	$\cdot$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$y = \sin ax$	$\cdot$	1	$\cdot$	-1	$\cdot$



مرحله چهارم — نمایش منحنی توابع با ضابطه $y = k \sin ax$ (یا $y = k \cos ax$) را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید عرض نقاط ماکزیمم و مینیمم منحنیهای نمودار مرحله سوم را از نقاط $+1$ و -1 به ترتیب به نقاط $+k$ و $-k$ انتقال دهیم، تا این که منحنی آنها به صورت زیر به دست آید. با فرض این که $k > 0$ داریم:

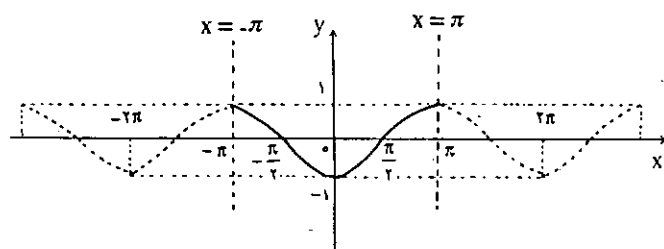


مرحله ششم — در این مرحله منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k \sin(ax + \beta) + L$ (یا $y = k \cos(ax + \beta) + L$) را رسم می‌کنیم. اگر $L > 0$ (عدد حقیقی است)، آن گاه منحنیهای به دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت مثبت محور عرضها بالا می‌بریم و اگر $L < 0$ ، آن گاه منحنیهای به دست آمده از مرحله پنجم را به اندازه L واحد در جهت منفی محور عرضها پایین می‌بریم.

مرحله پنجم — منحنی نمایش توابع با ضابطه $y = k \sin(ax + \beta)$ (یا $y = k \cos(ax + \beta)$) را رسم می‌کنیم: اگر $\beta > 0$ (زاویه‌ای برحسب رادیان)، آن گاه منحنیهای به دست آمده از مرحله چهارم را به اندازه β واحد رادیان در

آن را به طور دقیق تکرار می کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $x = -\pi$ و $x = +\pi$ قرار دارد، شکل مورد نظر ما می باشد.

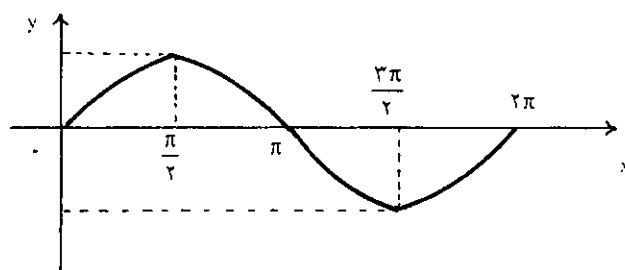
	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{T}{2} = \pi$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$T = 2\pi$
$y = -\cos x$	-1	1	-1	1



مثال ۲- با استفاده از رسم منحنی توابع مثلثاتی نشان دهید که $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

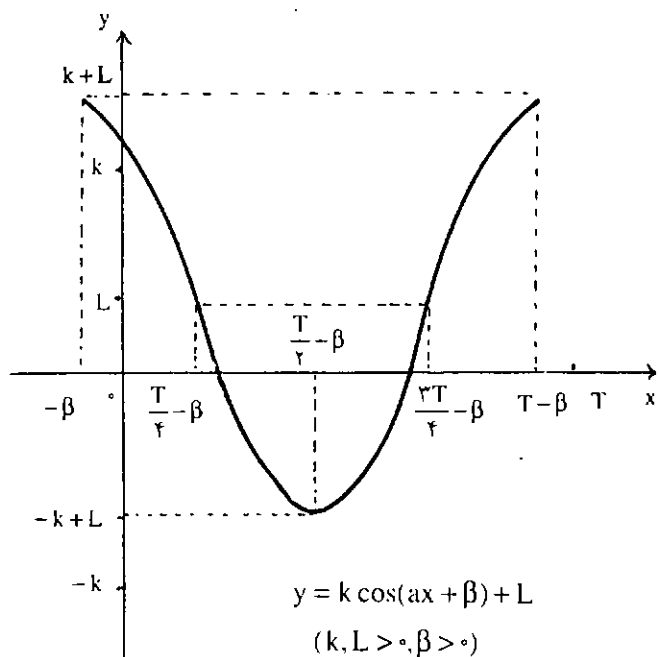
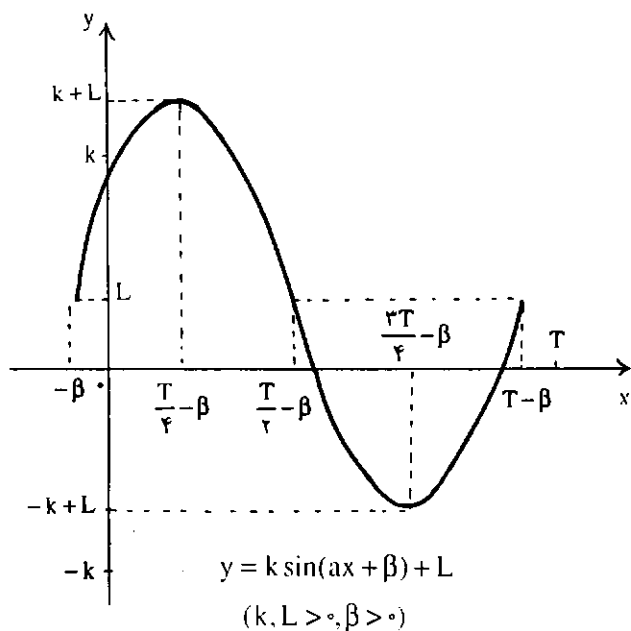
حل: دوره تناوب $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ برابر با $T = 2\pi$ می باشد، بنابراین نمودار $y = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم می کنیم.

	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{T}{2} = \pi$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$	$T = 2\pi$
$y = \sin x$	1	0	-1	0



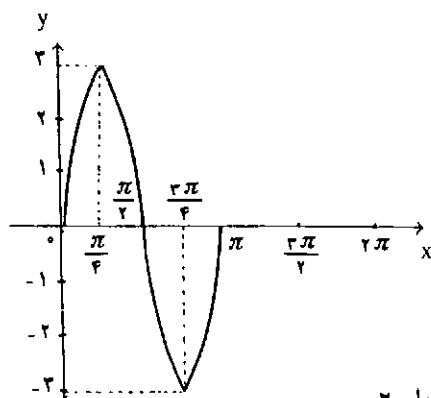
اکنون برای رسم $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ کافی است شکل مرحله

با فرض این که $L > 0$ شکل توابع بالا به صورت زیر می باشد:



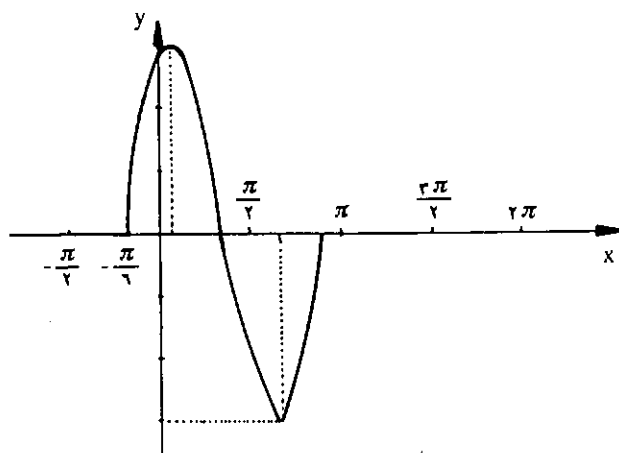
مثال ۱- منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = -\cos x$ را در فاصله $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

حل: دوره تناوب این تابع $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ می باشد بنابراین به کمک جدول زیر و روش نقطه یابی نمودار این تابع را در فاصله $[-\pi, \pi]$ رسم می کنیم، سپس در فاصله های مساوی 2π شکل



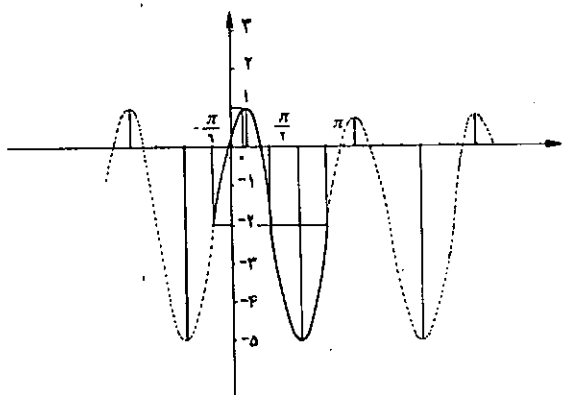
نمودار ۲

برای رسم منحنی نمایش $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ کافی است (نمودار ۲) را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. بنابراین:



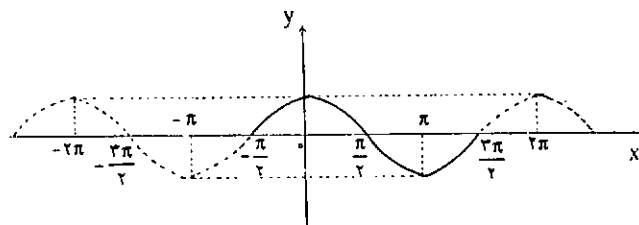
نمودار ۳

در مرحله آخر برای رسم $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ کافی است (نمودار ۳) را به اندازه ۲ واحد به طرف پایین منتقل کنیم، سپس در فاصله مساوی π شکل آن را به طور دقیق تکرار کنیم.



نمودار ۴

قبل را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان به طرف چپ منتقل کنیم. سپس منحنی نمایش این تابع را در فاصله‌های مساوی 2π تکرار می‌کنیم.



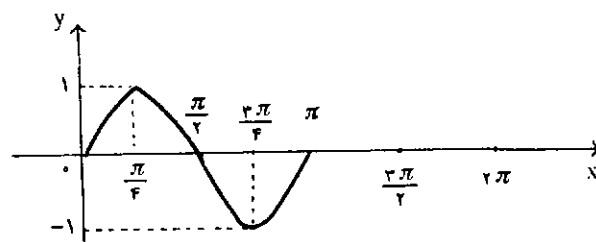
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید منحنی بالا نمایش تابع با ضابطه $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ و هم‌چنین منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ می‌باشد. در فیزیک اصطلاحاً می‌گویند منحنی نمایش $y = \sin x$ ، $\frac{\pi}{4}$ تقدم فاز نسبت به $y = \cos x$ دارد، یعنی این که منحنی نمایش تابع $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان از منحنی نمایش تابع $y = \cos x$ جلوتر می‌باشد.

مثال ۳ - منحنی نمایش تابع با ضابطه

$$y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$$

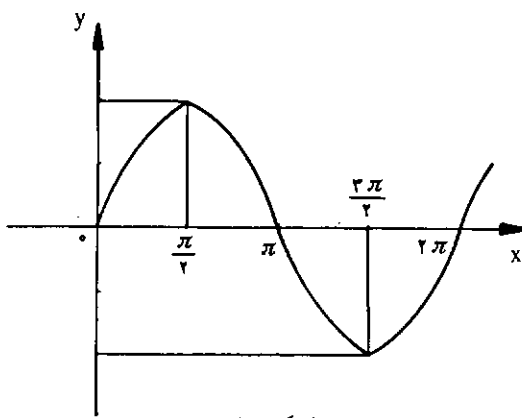
حل - دوره تناوب تابع فوق $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ می‌باشد، بنابراین به کمک جدول زیر و با روش نقطه‌یابی ابتدا نمودار $y = \sin 2x$ را در فاصله $[0, \pi]$ رسم می‌کنیم.

x	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$T = \pi$
$y = \sin 2x$	1	0	-1	0



نمودار ۱

اکنون منحنی نمایش $y = 3 \sin 2x$ را رسم می‌کنیم، برای این کار کافی است نقاط $+3$ و -3 را روی محور عرضها مشخص کنیم و نقاط ماکزیمم و مینیمم (نمودار ۱) را به ترتیب به نقاط $+3$ و -3 منتقل کنیم.

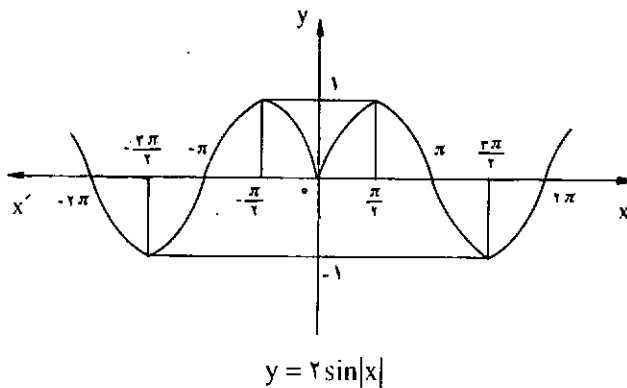


(شکل ب)

$$y = 2 \sin x$$

$$(x \geq 0)$$

اکنون اگر (شکل الف و ب) را در یک دستگاه مختصات رسم نماییم، منحنی نمایش تابع $y = 2 \sin|x|$ را خواهیم داشت:



$$y = 2 \sin|x|$$

مثال ۶ - نمودار تابع با ضابطه $y = [\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

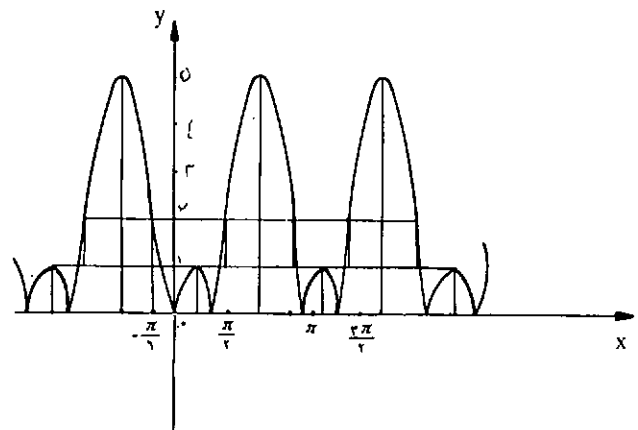
حل:

مرحله ۱ - ابتدا منحنی تابع با ضابطه $y = \sin x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله ۲ - سه خط $y = 1$ و $y = 0$ و $y = -1$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی را که روی این سه خط واقع می‌باشند، با نقاطی توپر مشخص می‌کنیم، سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = -1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط توپر) را روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم.

مثال ۴ - منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = |3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2|$ را رسم کنید.

حل - ابتدا منحنی نمایش تابع $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2$ را رسم می‌کنیم (نمودار ۴)، سپس قرینه قسمتی از منحنی نمایش تابع که زیر محور طولهاست نسبت به محور x ها پیدا می‌کنیم، در نتیجه نمودار تابع به صورت زیر به دست می‌آید:

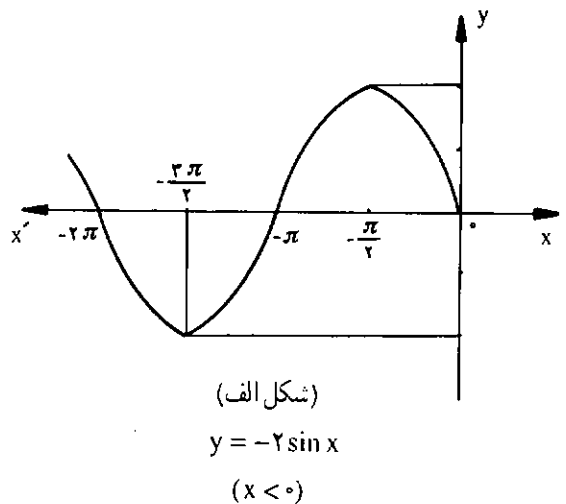


مثال ۵ - منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = 2 \sin|x|$ را رسم کنید.

حل - با توجه به خواص قدرمطلق داریم:

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$$

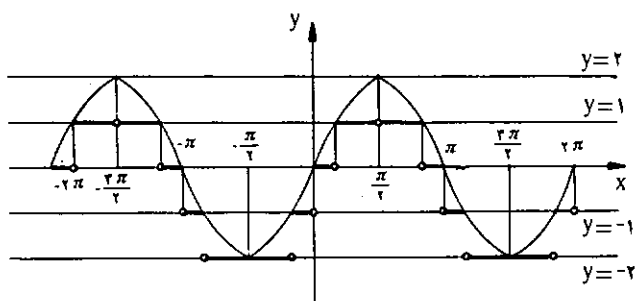
برای رسم منحنی نمایش این تابع ابتدا $y = 2 \sin x$ را برای $x \geq 0$ رسم می‌کنیم، سپس $y = -2 \sin x$ را برای $x < 0$ رسم خواهیم کرد.



(شکل الف)

$$y = -2 \sin x$$

$$(x < 0)$$

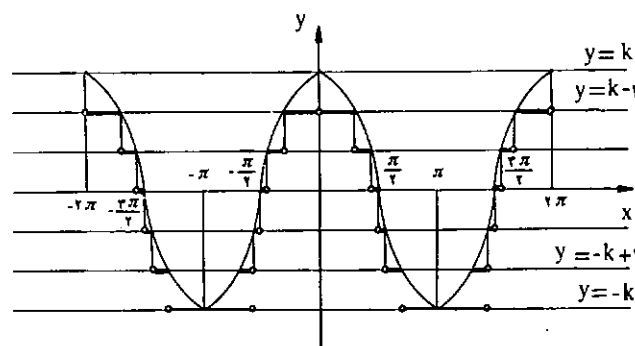


مثال ۸- نمودار تابع با ضابطه $y = [k \cos x]$ (که در آن $|k| \geq 1$) را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱- ابتدا منحنی $y = k \cos x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

مرحله ۲- خطوط $y = -k+2$ و $y = -k+1$ و $y = -k$ و $y = k-1$ و $y = k+2$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط واقع می‌باشند را پررنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = -k+1$ و $y = -k$ قرار دارد، روی خط $y = -k$ تصویر می‌کنیم، و به همین ترتیب در مرحله آخر قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y = k-1$ و $y = k$ قرار دارد، روی خط $y = k-1$ تصویر می‌کنیم، تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.

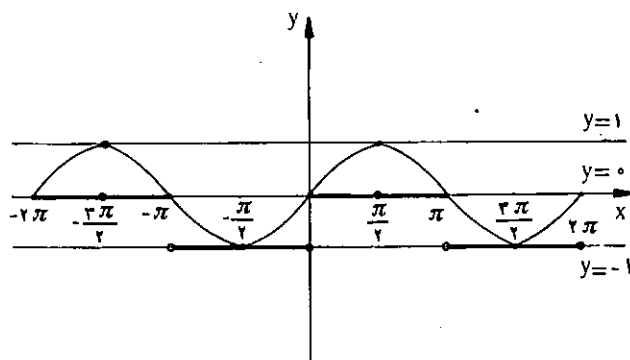


مثال ۹- نمودار تابع با ضابطه $y = [k \sin x]$ (که در آن $0 \leq |k| < 1$) را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱- چون $0 \leq |k| < 1$ ، بنابراین منحنی نمایش تابع $y = k \sin x$ همواره بین دو خط $y = 1$ و $y = -1$ واقع می‌شود.

تا نمودار تابع $y = [\sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت زیر به دست آوریم.



مثال ۷- نمودار تابع با ضابطه $y = [2 \sin x]$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

مرحله ۱- با توجه به مطالب گفته شده درباره رسم توابع مثلثاتی درجه اول، ابتدا منحنی نمایش $y = 2 \sin x$ را رسم می‌کنیم.

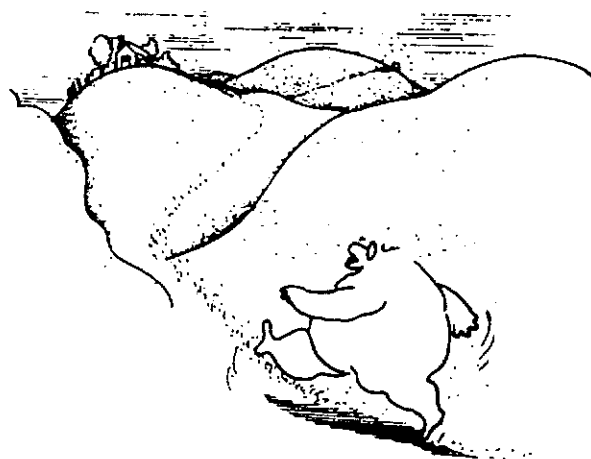
مرحله ۲- خطوط $y = 2, y = 1, y = 0, y = -1, y = -2$ را رسم می‌کنیم و نقاطی از منحنی که روی این خطوط قرار دارند را پررنگ می‌کنیم. سپس قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = -1$ و $y = -2$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = -2$ تصویر می‌کنیم و قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 0$ و $y = -1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = -1$ تصویر می‌کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 1$ و $y = 0$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = 0$ تصویر می‌کنیم و در مرحله آخر قسمتی از منحنی که بین دو خط $y = 2$ و $y = 1$ قرار دارد (به غیر از نقاط پررنگ) را روی خط $y = 1$ تصویر می‌کنیم تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.

۱- به طور کلی قسمتی از منحنی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد را روی خط افقی پایین تصویر می‌کنیم. یعنی اگر قسمتی از نمودار منحنی بین دو خط افقی متوالی $y = i$ و $y = i+1$ قرار داشته باشد، آن را روی خط $y = i$ تصویر می‌نماییم.

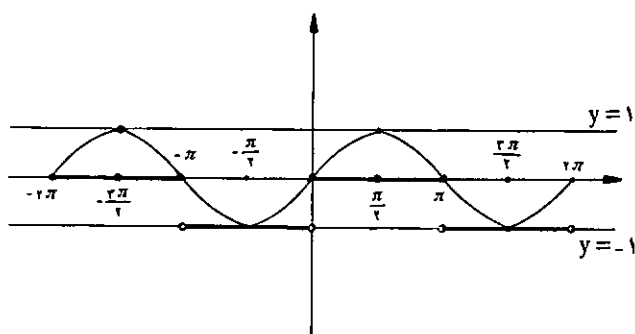


تفریح اندیشه ۴

مهرداد به پیاده روی عادت دارد. سرعت او در راهپیمایی ثابت و ۶ کیلومتر در ساعت است. او هر روز، هنگام ظهر، در یک میهمانخانه ییلاقی که در میانه مسیرش است، با دوستش ملاقات می کند. این محل در فاصله ۳۰ کیلومتری خانه او و دوستش واقع شده است. سرعت دوستش در راهپیمایی ۵/۵ کیلومتر در ساعت، یعنی کمی کمتر از سرعت مهرداد می باشد. اگر این دو قرار بگذارند که سر ظهر و همزمان به محل ملاقاتشان در میهمانخانه برسند، در ساعت ۱۱ در چه فاصله ای از یکدیگر باید قرار داشته باشند.



مرحله ۲- ابتدا نقاطی از منحنی را که روی خط $y=0$ قرار دارند، پررنگ می کنیم، سپس قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=1$ و $y=0$ قرار دارد، روی خط $y=-1$ تصویر می کنیم و به همین ترتیب قسمتی از منحنی را که بین دو خط $y=0$ و $y=1$ قرار دارد، روی خط $y=0$ تصویر می کنیم. تا نمودار تابع فوق را به دست آوریم.



تمرین

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

$$1- y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 4$$

$$2- y = 4\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$$

$$3- y = \left|3\sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\right|$$

$$4- y = -5\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - 1$$

فهرست منابع

- ۱- ریاضیات ۳ نظام جدید.
- ۲- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی - لیتهد - (جلد اول).
- ۳- فیزیک هالیدی - (جلد اول).