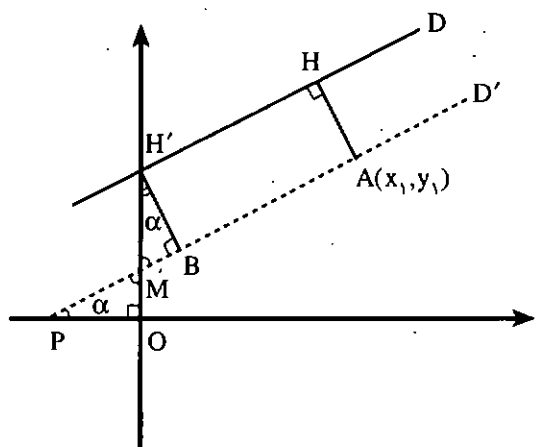




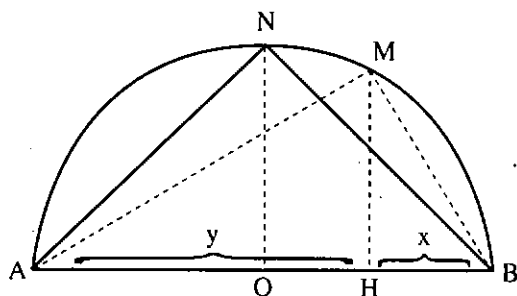
بسیاری از مسأله های ریاضی را می توان با روش هایی ابتکاری و از راه هایی کوتاه تر از روش های معمولی حل کرد. توجه به این روش ها و اصولاً تلاش برای حل یک مسأله از چند راه مختلف می تواند باعث پرورش قوه خلاقیت دانش آموز شود و از این حیث اهمیت خاصی دارد. در این جا سعی کرده ایم به نمونه هایی از این مسائل اشاره کنیم:



اما روش کوتاه تری در این جا ارائه می شود: شیب خط D ، مساوی $-\frac{a}{b}$ است و از A خط D' را با همین شیب،

مثال ۱. (محاسبه فاصله یک نقطه از یک خط در دستگاه مختصات دو بعدی)

دستور تعیین فاصله نقطه معلوم $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $D: ax + by + c = 0$ را تقریباً همه دانش آموزان دبیرستانی می دانند، اما چگونگی به دست آوردن این دستور در بیش تر کتاب های درسی و کمک درسی به شیوه ای دشوار بیان شده است. ابتدا معادله خط راستی که از A عمود بر D رسم می شود را نوشته و سپس مختصات نقطه برخورد این خط و D (نقطه H) را یافته و از آن جا طول AH را به کمک دستور تعیین طول پاره خط، به دست می آوریم. این روش معمولاً با محاسبات زیاد و دشوار همراه است.



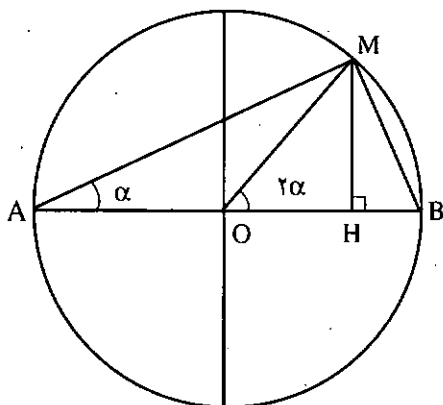
پاره خط AB را به طول $x+y$ در نظر گرفته و نیم دایره ای به قطر AB رسم می کنیم. بدیهی است که برای هر نقطه دلخواه M روی محیط نیم دایره مثلث MAB در رأس M قائم الزویه است (چرا؟) لذا اگر عمود MH را بر AB رسم کنیم، خواهیم داشت: $MH^2 = AH \cdot BH$ و یا $MH = \sqrt{AH \cdot BH}$ ، بنابراین MH همواره واسطه هندسی بین AH و BH است. حال اگر O وسط AB باشد، بدیهی است که: $ON = OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{x+y}{2}$ و در نتیجه ON نیز واسطه حسابی AH و BH است و بدیهی است

که $ON \geq MH$ بنابراین: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (سؤال: تساوی چه موقع اتفاق می افتد؟)

مثال ۳. درستی اتحاد مثلثاتی $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$ را نشان دهید.

حل: باز هم از روش هندسی کمک می گیریم. در دایره مثلثاتی شکل زیر می توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{MH}{AH} = \frac{MH}{OA + OH} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad (\text{چرا؟})$$



موازی D رسم می کنیم.

اگر نقطه برخورد D و D' را با محورهای H' و M بنامیم و از H' عمود H'B را بر D' (و بر D) رسم کنیم، بدیهی است که: $H'B = AH = h$ همچنین زاویه ای که خط D' با محور x می سازد با زاویه ای که خط H'B با محور y می سازد برابر است:

$$\angle P = \angle H' = \alpha \quad (\text{چرا؟})$$

حال برای یافتن OH' و OM کافی است که در معادله های D' و D، x را مساوی صفر قرار دهیم:

$$ax + by + c = 0, \quad x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow OH' = -\frac{c}{b}$$

$$D: y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1), \quad x = 0 \Rightarrow y = y_1 + \frac{a}{b}x_1 \Rightarrow$$

$$OM = y_1 + \frac{a}{b}x_1 \Rightarrow MH' = |OH' - OM|$$

$$= \left| -\frac{c}{b} - y_1 - \frac{ax_1}{b} \right| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{b} \right|$$

همچنین با توجه به شیب خط D واضح است که: $\tan \alpha = -\frac{a}{b}$ و از آن جا داریم:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Delta MH'B: BH' = MH' \cdot \cos \alpha$$

$$BH' = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{b} \right| \times \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۲. (اثبات نامساوی واسطه های حسابی - هندسی)

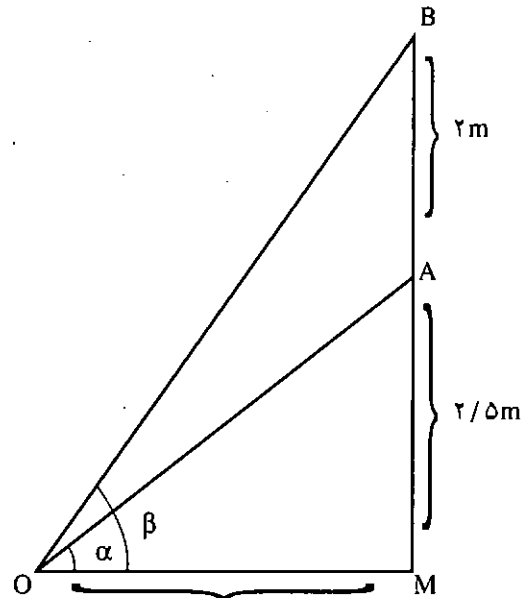
یکی از معروف ترین روابط نابرابری، نامساوی واسطه های حسابی - هندسی می باشد: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، داریم $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

اثبات این نابرابری به طریقه جبری در کتاب های مختلفی ذکر شده است. در این جا یک راه حل ساده هندسی برای آن ارائه می دهیم.

تمرین: درستی اتحاد فوق را به روش مثلثاتی ثابت کنید.
 سپس درستی اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ را به روش هندسی نشان دهید.

مثال ۴. (اثبات قضیه فیثاغورس)

برای قضیه فیثاغورس اثبات های بسیاری ارائه شده است، اما شاید از این اثبات کوتاه تر وجود نداشته باشد!



در شکل بالا مربع ABCD به ضلع a و مثلث های قائم الزاویه همنهشت AMB، BNC، CPD و AQD به اضلاع زاویه قائمه b و c رسم شده اند. شش ضلعی MBCPDQ را با مربع ABCD مقایسه کنید. این دو شکل در بخشی ABCPD مشترکند و قسمت های دیگر آنها نیز دو مثلث قائم الزاویه هم مساحت هستند. بنابراین مساحت های آنها با هم برابر است. اما شش ضلعی فوق از دو مربع به اضلاع b و c تشکیل شده است، بنابراین: $a^2 = b^2 + c^2$! این روش بسیار زیبا منسوب به فضل حاتم نیریزی ریاضی دان ایرانی قرن سوم هجری می باشد.

مثال ۵. (اثبات دو رابطه معروف در آنالیز ترکیبی)

رابطه های الف) $c(n, r) = c(n, n-r)$ و

ب) $c(n, r-1) + c(n, r) = c(n+1, r)$ که دومی موسوم به اتحاد پاسکال می باشد، از مسائل کتاب ریاضیات سال دوم رشته ریاضی می باشند. معمولاً برای اثبات آنها روش مستقیم به کار می رود که به خصوص در مورد دومی طولانی می باشد. اما در این جا با استفاده از یک روش ساده موسوم به دوگانه شماری مسأله را به سادگی حل می کنیم. برای اثبات (الف) می گوئیم: مجموعه ای از n شیء مختلف را در نظر بگیرید. با انتخاب هر زیر مجموعه r عضوی از این n شیء خود بخود یک زیر مجموعه n-r عضوی در سوی دیگر تشکیل می شود. بنابراین تعداد راه های انتخاب r شیء از این n شیء معادل است با تعداد راه های انتخاب n-r شیء از n شیء یعنی: $c(n, r) = c(n, n-r)$ برای اثبات (ب) فرض کنید n+1 شیء متمایز داشته و بخواهیم زیر مجموعه هایی r عضوی از آن انتخاب کنیم. بدیهی است که تعداد انتخاب های ما برابر است با: $c(n+1, r)$ اما به طریقی دیگر می توانیم یکی از اشیاء (از n+1 شیء) را جدا کنیم. در این صورت زیر مجموعه های r عضوی دو دسته هستند: دسته ای که شامل این شیء جدا شده نیستند و تعداد آنها برابر است با:

$c(n, r)$ (چرا؟) و دسته ای که شامل این شیء هستند و تعداد آنها برابر است با: $c(n, r-1)$ (چرا؟) بنابراین داریم:

$$c(n, r) + c(n, r-1) = c(n+1, r)$$

تمرین: اکنون دو شیء a و b را از n+1 شیء جدا کنید و از آن جا ثابت کنید:

$c(n+1, r) = c(n-1, r) + 2c(n, r-1) + c(n-1, r-2)$
 آیا می توانید دستور بالا را به کمک اتحاد پاسکال ثابت کنید؟

مثال ۶. (حل یک مسأله بهینه سازی از حسابان)

یکی از مسائل معروف در کتاب حسابان سال سوم ریاضی (تمرین صفحه ۱۵۹) چنین است: تابلویی که ۲ متر بلندی دارد بر دیواری نصب شده است. پایین تابلو ۲/۵ متر بالاتر از سطح تراز چشم یک ناظر است. ناظر در چه فاصله ای از دیوار بایستد تا زاویه ای که در چشم ناظر توسط تابلو تشکیل می شود، حداکثر باشد؟

$$\angle O' = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$
$$OM^{\gamma} = MA, MB$$

$$\Rightarrow OM^2 = 2/5 \times 4/5 = 11/25 \Rightarrow OM = \sqrt{11/25}$$

«حاصل ضرب هر n عدد طبیعی متوالی همواره بر $n!$ بخش پذیر است.»

$$x = (a + 1)(a + 2) \dots (a + n)$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times a(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times a}$$

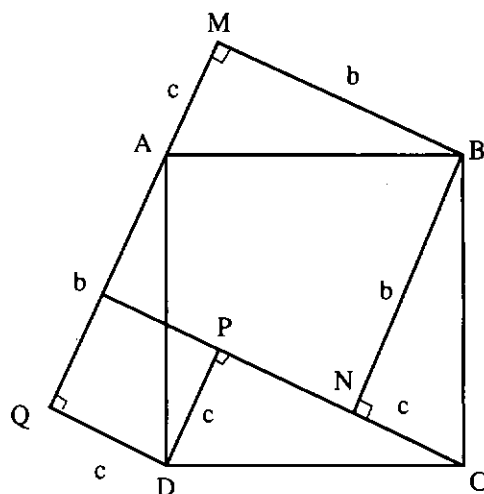
$$= \frac{(a+n)!}{a!} = \frac{n!(a+n)!}{n!a!} = n! \binom{a+n}{a} \Rightarrow n! | x$$

یکی از فضاییای مشهور در تئوری اعداد این است:

$$(a^n, b^n) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1$$

اگر a و b اعداد صحیح باشند و a^n و b^n نسبت به هم اول باشند، آنگاه a و b نیز نسبت به هم اول خواهند بود. این قضیه را می‌توان به روش‌های گوناگون و از جمله قضیه استقرای ریاضی استفاده شده است. اما یک استدلال ساده چنین است:

اگر $(a, b) = 1$ باشد، یعنی a و b نسبت به هم اول باشند، کسر $\frac{a}{b}$ تحویل ناپذیر است. بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ نیز تحویل ناپذیر است، لذا $\frac{a^n}{b^n}$ تحویل ناپذیر است و در نتیجه: $(a^n, b^n) = 1$.


$$\angle BOA = \angle BOM = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{r/\delta}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{MB}{OM} = \frac{r/\delta}{x}$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{Arctg} \frac{y/\delta}{x}, \quad \beta = \text{Arctg} \frac{y/\delta}{x}$$

$$\Rightarrow \angle BOA = t = \operatorname{Arctg} \frac{y/\delta}{x} - \operatorname{Arctg} \frac{y/\delta}{x}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{-\frac{r/\Delta}{x^r}}{1 + \left(\frac{r/\Delta}{x}\right)^r} - \frac{-\frac{r/\Delta}{x^r}}{1 + \left(\frac{r/\Delta}{x}\right)^r} = 0$$

و از حل معادلهٔ اخیر که محاسبات نسبتاً زیادی دارد نتیجه می‌شود: $x = \sqrt{11/25}$ اما در کنار این راه حل، بد نیست که به راه حل هندسی زیبا و کوتاه این مسأله نیز اشاره شود.

