



رادیكال

(قسمت پنجم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

حل معادلات رادیكالی

در حل معادلات باید به نکات زیر توجه کرد:

(۱) برای حل معادلات رادیكالی با فرجه زوج ابتدا حوزه تعریف معادله را مشخص می‌کنیم. (در بعضی مواقع خاص، به وسیله حوزه تعریف می‌توان ریشه‌های معادله را مشخص کرد و یا تعیین کرد که معادله جواب حقیقی ندارد). سپس با به توان رساندن معادله به معادله‌ای خواهیم رسید که اگر قابل حل باشد ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم، در این صورت ریشه‌هایی که در حوزه تعریف معادله اولیه قرار داشته باشند، ریشه‌های معادله اصلی می‌باشند.

همچنین می‌توان بدون مشخص کردن حوزه تعریف، معادله را به یک معادله قابل حل تبدیل کرد و پس از حل معادله، جوابهای آن را در معادله اولیه آزمایش کرد، هر کدام صدق کند ریشه معادله اصلی می‌باشد.

(۲) اگر برای دو معادله مانند:

$$A(x) = B(x) \quad (۱) \quad ; \quad C(x) = D(x) \quad (۲)$$

هر ریشه معادله اول، ریشه‌ای از معادله دوم باشد، آنگاه معادله دوم را نتیجه معادله اول گویند و می‌نویسند:

$$A(x) = B(x) \Rightarrow C(x) = D(x)$$

اگر به جای معادله مفروض، نتیجه آن را در نظر بگیریم، آنگاه مجموعه جوابهای معادله دوم، شامل همه ریشه‌های معادله اول است، ولی در بین مجموعه جوابهای معادله دوم، ممکن است عده‌های دیگری هم وجود داشته باشد که آنها را، ریشه‌های

خارجی (ریشه‌های بیگانه) معادله اصلی می‌نامند. بدیهی است با آزمایش ریشه‌ها می‌توان ریشه‌های خارجی معادله را از ریشه‌های حقیقی آن جدا کرد. برای مثال:

$$\sqrt[6]{x^4 - 1} = \sqrt[6]{x^2 - 1} \Rightarrow x^4 - 1 = x^2 - 1$$

پس از حل معادله دوم، به دست می‌آید:

$$x_1 = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = 0 \quad \text{و} \quad x_3 = 1$$

که با آزمایش ریشه‌ها، نتیجه می‌شود که $x_2 = 0$ ، ریشه معادله اصلی نیست و در واقع ریشه خارجی معادله اصلی می‌باشد.

دو معادله (۱) و (۲) را هم‌ارز (معادل) گویند، هرگاه مجموعه همه جوابهای یکی بر مجموعه همه جوابهای دیگری منطبق باشد؛ یا مجموعه جواب هر دو معادله تهی باشد.

از تعریف هم‌ارزی معادله‌ها نتیجه می‌شود که، به جای حل یک معادله، می‌توان معادله هم‌ارز با آن را حل کرد.

مثال ۱:

معادله $\sqrt[3]{x} = 1$ با معادله $x = 1$ هم‌ارز است، زیرا عدد ۱ ریشه هر یک از این معادله‌ها می‌باشد؛ و هیچ کدام از این دو معادله، ریشه حقیقی دیگری به جز ۱ ندارند.

مثال ۲: معادله $\sqrt{\frac{x}{2} + 1} = \sqrt{2 - \frac{x}{2}}$ با معادله $\frac{x}{2} + 1 = 2 - \frac{x}{2}$ هم‌ارز است. زیرا با توجه به شرایط $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$ و $2 - \frac{x}{2} \geq 0$ ، اگر دو طرف معادله اصلی را مجذور کنیم:

$$\sqrt{\frac{x}{2} + 1} = \sqrt{2 - \frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = 2 - \frac{x}{2}$$

برای مثال معادله $(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{2-2x})^2$ را می‌توان به صورت $2x+1=2-2x$ یا $4x=1$ یا $x=\frac{1}{4}$ نوشت.
مثال ۴: معادله $7+\sqrt{x}=9$ را حل کنید.

حل: دامنه متغیر x (حوزه تعریف معادله) عبارت است از $x \geq 0$: بنابراین جواب معادله باید در شرط فوق صدق کند.
داریم:

$$\sqrt{x}=9-7 \Rightarrow \sqrt{x}=2$$

اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم، نتیجه می‌شود $x=4$ ، که در شرط $x \geq 0$ صدق می‌کند.

مثال ۵: معادله $7\sqrt{4x-1}+5=19$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرط $4x-1 \geq 0$ یا $x \geq \frac{1}{4}$ صدق کند و داریم:

$$7\sqrt{4x-1}+5=19 \Rightarrow 7\sqrt{4x-1}=14 \Rightarrow \sqrt{4x-1}=2$$

(دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم)

$$\rightarrow 4x-1=4 \Rightarrow 4x=5$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{4}}$$

که در شرط $x \geq \frac{1}{4}$ صدق می‌کند.

مثال ۶: معادله $3\sqrt{x-4}+14=5$ را حل کنید.

حل: دامنه متغیر x عبارت است از: $x-4 \geq 0$ یا $x \geq 4$:
و داریم:

$$3\sqrt{x-4}+14=5 \Rightarrow 3\sqrt{x-4}=-9 \Rightarrow \sqrt{x-4}=-3$$

چون طرف اول تساوی همیشه نامنفی و طرف دوم تساوی یک عدد منفی است، معادله دارای جواب نیست. در صورتی که به این نکته توجه نکنیم، و طرفین رابطه به دست آمده را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$$x-4=9 \Rightarrow x=13$$

با این که $x=13$ در شرط $x \geq 4$ صدق می‌کند، ولی با قرار دادن $x=13$ در معادله به تناقض خواهیم رسید:

$$x=13: 3\sqrt{13-4}+14=5 \Rightarrow 23=5 \quad (\text{تناقض})$$

بنابراین قبل از به توان ۲ رساندن طرفین تساوی باید به هم علامت بودن دو طرف تساوی توجه کرد تا گرفتار تناقض نشویم.

پس با توجه به تناقض اخیر نتیجه می‌شود که معادله دارای جواب نیست و مجموعه جواب معادله تهی می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 2-1$$

$$\Rightarrow x=1$$

در واقع عدد ۱، تنها ریشه هر دو معادله است.

مثال ۳: آیا دو معادله زیر هم‌ارزند:

$$\sqrt{4x^2+2x-5}=\sqrt{2x-1} \quad \text{و} \quad 4x^2+2x-5=2x-1$$

حل: مجموعه همه ریشه های معادله دوم، شامل دو عدد است:

$$x_1=-1 \quad \text{و} \quad x_2=1$$

آزمایش نشان می‌دهد که، عدد -۱، به حوزه تعریف معادله اول تعلق ندارد و در نتیجه نمی‌تواند ریشه آن باشد، یعنی $x_1=-1$ ، ریشه خارجی معادله اول است. به این ترتیب، این دو معادله، هم‌ارز نیستند.

(۳) اگر معادله به صورت $x^2=a$ و $a \geq 0$ ، باشد: جوابهای معادله $x=\sqrt{a}$ یا $x=-\sqrt{a}$ است.

(۴) اگر معادله ای به صورت $x^2=a$ و $a < 0$ ، باشد: معادله دارای ریشه حقیقی نیست، زیرا طرف اول تساوی عدد نامنفی و طرف دوم تساوی عددی همیشه منفی است.

(۵) اگر معادله ای به صورت $A(x).B(x).C(x)=0$ ، باشد: که در آن $A(x)$ و $B(x)$ و $C(x)$ عبارت‌هایی برحسب یک متغیر x باشند، در این صورت: $C(x)=0$ یا $B(x)=0$ یا $A(x)=0$ ، برای مثال از معادله $x\sqrt{x}\sqrt{x-1}=0$ نتیجه می‌شود:

$$x \geq 1 \quad \text{و} \quad \sqrt{x-1}=0 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x}=0 \quad \text{یا} \quad x=0$$

(۶) می‌دانیم اگر $A(x)=B(x)$ باشد، آنگاه:

$$A^2(x)=B^2(x)$$

اما عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی اگر

$$A^2(x)=B^2(x) \quad \text{باشد، آنگاه:}$$

$$A(x)=-B(x) \quad \text{یا} \quad A(x)=B(x)$$

برای مثال معادله $\sqrt{x}=\sqrt{2-x}$ را می‌توان به صورت $x=2-x$ یا $2x=2$ یا $x=1$ نوشت. از معادله $x^2=4$ نتیجه می‌شود:

$$x=-2 \quad \text{یا} \quad x=2$$

(۷) اگر $A^2(x)=B^2(x)$ و $B(x) \geq 0$ و $A(x) \geq 0$

($A(x)$ و $B(x)$ هم علامت باشند)، در این صورت می‌توان

$$A(x)=B(x)$$

نوشت:

مثال ۱۰: معادله $\sqrt{z^2 - 16} = 3$ را حل کنید:

حل: متغیر x باید در شرط $z^2 - 16 \geq 0$ صدق کند، و داریم:

$$\sqrt{z^2 - 16} = 3 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} z^2 - 16 = 9 \Rightarrow z^2 = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -5} \text{ یا } \boxed{z = 5}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا در شرط $z^2 - 16 \geq 0$ صدق می کنند.

مثال ۱۱: معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرایط $x-1 \geq 0$ و $x-2 \geq 0$ صدق کند و داریم:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x - 2 = 1 + x - 1 - 2\sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} -2\sqrt{x-1} = -2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1$$

$$x - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

جواب $x = 2$ قابل قبول است، زیرا در شرط $x \geq 2$ صدق می کند.

مثال ۱۲: معادله $\frac{6}{\sqrt{2m+1}} = 2$ را حل کنید.

حل: متغیر m باید در شرط $2m+1 > 0$ یا $m > -\frac{1}{2}$ صدق کند، و داریم:

$$\frac{6}{\sqrt{2m+1}} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{2m+1} = 6 \Rightarrow \sqrt{2m+1} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2m+1 = 9$$

$$\Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

جواب $m = 4$ قابل قبول است، زیرا در شرط $m > -\frac{1}{2}$ صدق می کند.

مثال ۱۳: معادله $\sqrt{u-1} = \frac{74}{\sqrt{u-1}}$ را حل کنید.

حل: متغیر u باید در شرط $u-1 > 0$ یا $u > 1$ صدق کند، و

داریم:

$$\sqrt{u-1} = \frac{74}{\sqrt{u-1}} \Rightarrow (\sqrt{u-1})^2 = 74 \Rightarrow u-1 = 74$$

$$\Rightarrow \boxed{u = 75}$$

جواب $u = 75$ قابل قبول است، زیرا در شرط $u > 1$ صدق می کند.

مثال ۱۴: معادله $\sqrt{4x} = -2x$ را حل کنید.

مثال ۷: معادله $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{8a^2} = 8(1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{64}})$ را حل کنید.

حل: حوزه تعریف معادله مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ می باشد. و داریم:

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{8a^2} = 8(1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{64}})$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{2^3 a^2} = 8 + 8\sqrt[3]{\frac{a^2}{4^3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a^2} = 4 + 2\sqrt[3]{a^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = 4 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} a^2 = 4^3 \Rightarrow a^2 = 64$$

$$\Rightarrow a^2 = 8^2 \Rightarrow a = -8 \text{ یا } a = 8$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله} = \{-8, 8\}$$

مثال ۸: معادله $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ را حل کنید.

حل: با فرض $x^2 = t$ ، داریم:

$$x^4 = t: t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 2$$

بنابراین:

$$x^4 = 1 \text{ یا } x^4 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ یا } x = \pm \sqrt[4]{2}$$

پس معادله دارای چهار ریشه حقیقی است:

$$\text{مجموعه جوابهای معادله} = \{-\sqrt[4]{2}, -1, 1, \sqrt[4]{2}\}$$

مثال ۹: معادله $\sqrt{y} - y = -2$ را حل کنید.

حل: معادله را می توان به صورت $\sqrt{y} = y - 2$ نوشت. با

توجه به این معادله داریم:

$$y \geq 0 \text{ و } y - 2 \geq 0 \text{ یا } y \geq 2$$

که در نتیجه دامنه متغیر معادله عبارت است از: $y \geq 2$.

داریم:

$$\sqrt{y} - y = -2 \Rightarrow \sqrt{y} = y - 2$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} y = (y-2)^2 \Rightarrow y = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \text{ یا } \boxed{y = 4}$$

پس فقط جواب $y = 4$ قابل قبول است. زیرا در شرط

$y \geq 2$ صدق می کند.

$$9) \sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} = 2$$

$$10) \sqrt[3]{x^5+32} + \sqrt[6]{x^5+32} = 2$$

$$11) (x^2-1)^{22} + |x^{75}+1| + \sqrt[7]{x^2+3x+2} = 0$$

$$12) \sqrt[5]{x^3\sqrt{x}\sqrt{64x}} = 2$$

$$13) \sqrt{2-x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 3$$

$$14) (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})^x = 2$$

$$15) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x-1} = 0$$

حل: (۱) دامنه متغیر x مجموعه اعداد حقیقی است
($x \in \mathbb{R}$)؛ و با مکعب کردن دو طرف معادله به دست می آید:

$$4x-3+2x-1+3\sqrt[3]{4x-3}+3\sqrt[3]{2x-1}+(\sqrt[3]{4x-3}+\sqrt[3]{2x-1})=8$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[3]{4x-3} + \sqrt[3]{2x-1}$ برابر ۲ است،
بنابراین خواهیم داشت:

$$6\sqrt[3]{(4x-3)(2x-1)} = 12 - 6x \quad (1)$$

پس از مکعب کردن دو طرف معادله (۱)، و اختصار لازم
خواهیم داشت:

$$(4x-3)(2x-1) = (2-x)^3;$$

$$8x^2 - 10x + 3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3;$$

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ یا } x^2+3x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

جواب $x=1$ در معادله صدق می کند. و معادله
 $x^2+3x+5=0$ ریشه حقیقی ندارد. بنابراین معادله تنها یک
ریشه حقیقی دارد.

(۲) با حل دستگاه نامعادلات:

$$\begin{cases} 2x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{2} \\ 6x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \\ 3x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حل: متغیر x باید در شرایط $4x \geq 0$ و $-2x \geq 0$ و یا
 $x \geq 0$ و $x \leq 0$ و در نتیجه در شرط $x=0$ صدق کند. با قرار
دادن $x=0$ در معادله داریم:

$$\sqrt[4]{4(0)} = -2(0) \Rightarrow 0=0$$

پس $x=0$ جواب معادله است.

مثال ۱۵: معادله $x\sqrt{3}-\sqrt{12}=\sqrt{75}-\sqrt{27x^2}$ را حل
کنید.

حل: دامنه متغیر x مجموعه اعداد حقیقی است: $x \in \mathbb{R}$ ،
و داریم:

$$x\sqrt{3}-\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{25 \times 3} - \sqrt{9 \times 3x^2}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 3|x|\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} + 3|x|\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(x+3|x|) = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x+3|x|=7$$

$$x \geq 0: x+3x=7 \Rightarrow 4x=7 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{4}}$$

$$x < 0: x-3x=7 \Rightarrow -2x=7 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right\}$$

معادلات زیر را حل کنید:

$$1) \sqrt[3]{4x-3} + \sqrt[3]{2x-1} = 2$$

$$2) \sqrt{2x+7}\sqrt{6x-2} = 6\sqrt{3x-2}\sqrt{x}$$

$$3) \frac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} = \sqrt[4]{4x-1}$$

$$4) \sqrt[3]{x+2} = \sqrt{2x+3}$$

$$5) \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}} = \frac{1}{x}$$

$$6) \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[6]{2x-3}$$

$$7) \sqrt{2+\sqrt{x^4+2}} = x$$

$$8) \sqrt{22x+3} + \sqrt{2x-2} - \sqrt{18x+7} = \sqrt{2-2x}$$

(۵) از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 2-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x} \neq 0 \end{cases}$$

دامنه متغیر x به دست می آید : $-1 \leq x < 0$ و $0 < x \leq 1$.

دو طرف معادله را در $x(\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x})$ ضرب می کنیم :

$$\frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x(\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}) = \sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow (x-1)\sqrt{2x+2} + (x+1)\sqrt{2-2x} = 0$$

دو طرف معادله اخیر را بر $-\sqrt{2}$ تقسیم می کنیم :

$$(1-x)\sqrt{x+1} - (x+1)\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{x+1}(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ یا } \sqrt{x+1} = 0 \text{ یا } \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \text{ یا } \boxed{x=-1} \text{ یا } x=0 \quad (\text{قابل قبول نیست})$$

جواب $x=0$ به دامنه متغیر تعلق ندارد، ولی آزمایش مستقیم نشان می دهد که دو عدد ۱ و -۱ ریشه های معادله اصلی می باشند.

(۶) دامنه متغیر x مجموعه اعداد حقیقی است ($x \in \mathbb{R}$) : و با مکعب کردن دو طرف معادله به دست می آید :

$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})$$

$$= 2x-3$$

بنابر شرط، عبارت $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2}$ برابر $\sqrt[3]{2x-3}$ است : بنابراین خواهیم داشت :

$$3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \text{ یا } \sqrt[3]{x-2} = 0 \text{ یا } \sqrt[3]{2x-3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \text{ یا } \boxed{x=2} \text{ یا } \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

هر سه جواب در معادله اصلی صدق می کنند : بنابراین :

$$\text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

دامنه متغیر x به دست می آید :

با مجذور کردن دو طرف معادله، داریم :

$$(2x+7)(6x-2) = 36(3x-2)x$$

$$12x^2 + 38x - 14 = 108x^2 - 72x$$

$$96x^2 - 110x + 14 = 0 \Rightarrow (x-1)(96x-14) = 0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ یا } 96x-14=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \text{ یا } x = \frac{7}{48} \quad (\text{قابل قبول نیست})$$

فقط جواب $x=1$ در شرط $x \geq \frac{2}{3}$ و همچنین در معادله اصلی صدق می کند.

(۳) دامنه متغیر x از حل نامعادله $4x-1 > 0$ به دست می آید :

$$x > \frac{1}{4}$$

اگر دو طرف معادله را در $\sqrt[4]{(4x-1)^3}$ ضرب کنیم :

$$\frac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} = \sqrt[4]{4x-1} \Rightarrow 6x-2 = \sqrt[4]{(4x-1)^7}$$

$$\Rightarrow 6x-2 = 4x-1$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

جواب $x = \frac{1}{2}$ در شرط $x > \frac{1}{4}$ و همچنین در معادله اولیه صدق می کند.

(۴) دامنه متغیر x عبارت است از : $2x+3 \geq 0$ یا $x \geq -\frac{3}{2}$ و داریم :

$$\sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x+3} \xrightarrow{(\text{دو طرف به توان ۶})} (x+2)^2 = (2x+3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \text{ یا } 3x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

جواب $x=-1$ در شرط $x \geq -\frac{3}{2}$ و همچنین در معادله اولیه صدق می کند.

و معادله $8x^2 + 27x + 23 = 0$ ریشه حقیقی ندارد. بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

پس از ساده کردن معادله خواهیم داشت:

$$4x + 4|x-1| = 4 \Rightarrow x + |x-1| = 1$$

$$x \geq 1: x + x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1: x - (x-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}$$

بنابراین هر عدد که در شرط $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ صدق کند، جواب معادله است، یعنی معادله بی شمار جواب دارد.

۱۰ دامنه متغیر x عبارت است از: $x^5 + 32 \geq 0$ یا $x \geq -2$ و با انتخاب $\sqrt[5]{x^5 + 32} = t$ داریم:

$$t^2 + t = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+2) = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

چون $t \geq 0$ است، پس فقط جواب $t = 1$ قابل قبول می باشد:

$$\sqrt[5]{x^5 + 32} = 1 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۵)}} x^5 + 32 = 1 \Rightarrow x^5 = -31 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[5]{31}}$$

جواب $x = -\sqrt[5]{31}$ در شرط $x \geq -2$ صدق می کند. بنابراین ریشه معادله اصلی می باشد.

۱۱ متغیر x باید در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ صدق کند. با توجه به این که عبارتهای $x^2 - 1$ و $|x^{75} + 1|$

همیشه نامنفی می باشند، نتیجه می شود که طرف اول معادله همیشه نامنفی است و بنابراین معادله وقتی جواب دارد که هر سه عبارت با هم صفر شوند:

$$(x^2 - 1)^{74} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$|x^{75} + 1| = 0 \Rightarrow x^{75} + 1 = 0 \Rightarrow x^{75} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -2$$

جواب $x = -1$ در شرط $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ صدق می کند و همچنین ریشه هر سه عبارت می باشد؛ بنابراین معادله تنها یک ریشه دارد: $\boxed{x = -1}$

۱۲ متغیر x باید در شرط $64x \geq 0$ یا $x \geq 0$ صدق کند؛ و داریم:

$$\sqrt[5]{x^3 \sqrt{x \sqrt{64x}}} = 2 \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۵)}} x^3 \sqrt{x \sqrt{64x}} = 2^5$$

۷ دامنه متغیر x از حل دستگاه نامعادلات: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 + 2 \geq 0 \end{cases}$ به دست می آید: $x \geq 0$ و داریم:

$$\sqrt{2 + \sqrt{x^4 + 2}} = x \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2 + \sqrt{x^4 + 2} = x^2 \Rightarrow \sqrt{x^4 + 2} = x^2 - 2$$

از $x \geq 0$ و معادله اخیر نتیجه می شود:

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^4 + 2 = (x^2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 2 = x^4 - 4x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریشه های به دست آمده در شرط $x \geq \sqrt{2}$ صدق نمی کنند.

بنابراین مجموعه جواب معادله، مجموعه تهی ($\emptyset$) است.

۸ با حل دستگاه نامعادلات:

$$\begin{cases} 22x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{22} \\ 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 18x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{18} \\ 2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

دامنه متغیر x به دست می آید:

$$x = 1$$

و با قرار دادن $x = 1$ در معادله، خواهیم داشت:

$$x = 1: \sqrt{22x+3} + \sqrt{2x-2} - \sqrt{18x+7} = \sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد: $\boxed{x=1}$

۹ حوزه تعریف معادله از حل دستگاه نامعادلات:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 2x - 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \\ 2x + 2\sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$$

به دست می آید: $x \geq \frac{1}{2}$ ؛ و داریم:

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = 2$$

دو طرف معادله را مجذور می کنیم:

$$2x + 2\sqrt{2x-1} + 2x - 2\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{4x^2 - 4(2x-1)} = 4(2x-1) \\ = 4$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad (\text{جواب معادله})$$

(۱۵) دامنه متغیر x مجموعه اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$
و با توجه به این نکته که اگر $u+v+t=0$ باشد، آنگاه:

$$u^3 + v^3 + t^3 = 3uvt$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x-1} = 0$$

$$\Rightarrow x+1-2x+x-1 = 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)} = 0$$

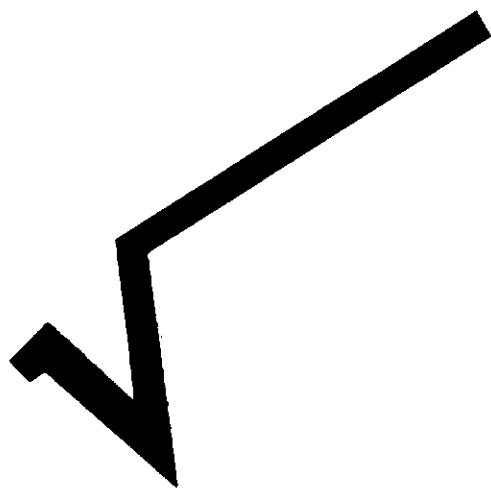
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x(1-2x)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } 1-2x=0 \text{ یا } x-1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0} \text{ یا } \boxed{x=\frac{1}{2}} \text{ یا } \boxed{x=1}$$

پس، معادله دارای سه ریشه حقیقی است:

$$\text{مجموعه جوابهای معادله} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$



$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} x^3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{64x} = 2^{15}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^{12} (64x) = 2^{30}$$

$$\Rightarrow 2^6 x^9 = 2^{30} \Rightarrow x^9 = 2^{24}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[9]{2^{24}} = \sqrt[9]{2^{18} \times 2^6} = 4\sqrt[9]{2^6} = 4\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4\sqrt[3]{4}}$$

جواب $x = 4\sqrt[3]{4}$ در شرط $x \geq 0$ و در معادله اصلی صدق

می‌کند. پس معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد.

(۱۳) متغیر x باید در شرایط $x^2 - x + 2 \geq 0$ و

$x^2 - x + 1 \geq 0$ و یا $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0$ و $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq 0$ صدق کند: $x \in \mathbb{R}$ و با انتخاب $x^2 - x + 1 = t$ داریم:

$$\sqrt{t+1} + \sqrt{t} = 3 \Rightarrow \sqrt{t+1} = 3 - \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow t+1 = 9 - 6\sqrt{t} + t \Rightarrow 6\sqrt{t} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} t = \frac{16}{9}$$

بنابراین:

$$x^2 - x + 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow x^2 - x - \frac{7}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{333}}{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{333}}{18} \approx 1/514 \\ \text{یا} \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{333}}{18} \approx -0/514 \end{cases}$$

بنابراین معادله، دارای دو ریشه حقیقی x_1 و x_2 می‌باشد.

(۱۴) دامنه متغیر x مجموعه اعداد حقیقی است. $(x \in \mathbb{R})$,

و داریم:

$$(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$$

بنابراین:

$$(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x + \frac{1}{(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x} = 2$$

و با انتخاب $(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^x = y$ داریم:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 + 1 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$