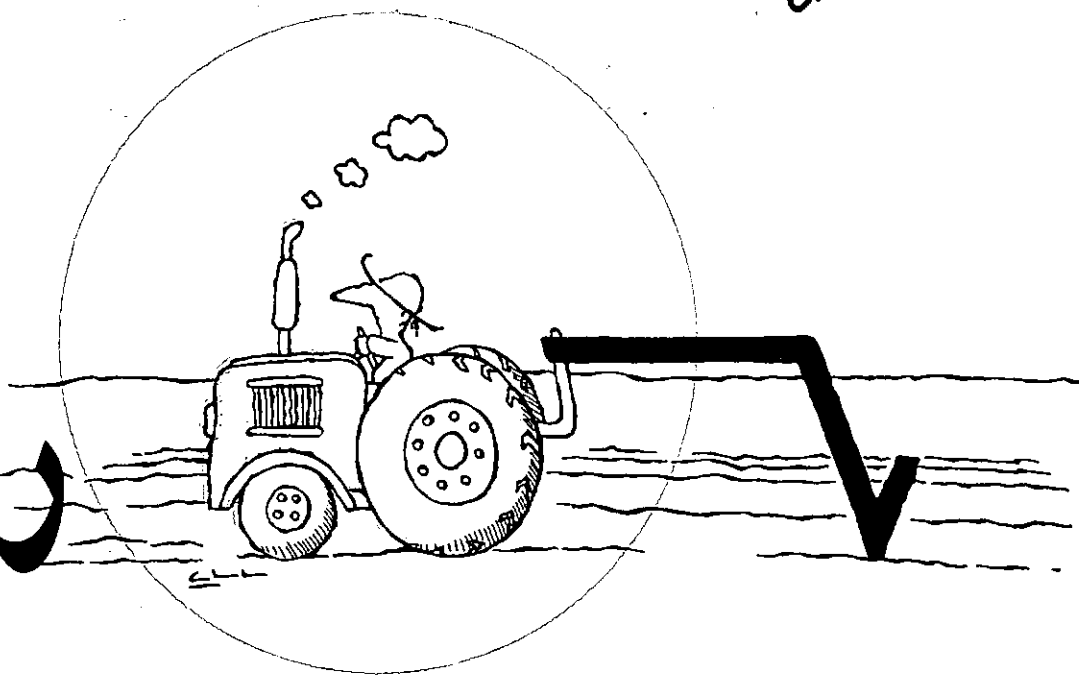


وادیگا



عددهای گنگ

ساده نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به هم، اول باشند. به بیان دیگر، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n ، هردو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{2}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}; 2 = \frac{m^2}{n^2}; m^2 = 2n^2 \quad (1)$$

از تساوی (۱) نتیجه می شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش پذیر است؛ پس باید m^2 ، یعنی m هم بر ۲ بخش پذیر باشد. و داشته باشیم:

$$m = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در برابری (۱)، $2k$ را به جای m می گذاریم:

$$(2k)^2 = 2n^2; 4k^2 = 2n^2; 2k^2 = n^2 \quad (2)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش پذیر است.

ولی از آن جا که m و n را نسبت به هم اول گرفته بودیم، نتیجه

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می دانیم طول قطر مربعی به ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{2}$ است؛ که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی توان یافت که به طور دقیق، برابر $\sqrt{2}$ باشد؛ زیرا:

$$1/4^2 = 1/96 < 2 < 1/5^2 = 2/25$$

$$1/41^2 = 1/9881 < 2 < 1/42^2 = 2/164$$

$$1/414^2 = 1/999396 < 2 < 1/415^2 = 2/102225$$

$$1/4142^2 = 1/99996164 < 2 < 1/4143^2 = 2/10024449$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد.

به عبارت دیگر، اگر m و n عددهایی درست فرض شوند،

نمی توان $\sqrt{2}$ را به صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در این جا این مطلب

را با روش «برهان خلف» به اثبات می رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری

همان طور که گفته شد، ۴ و -۴ ریشه های دوم ۱۶ می باشند.
ریشه های دوم ۱۶ را با $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ نشان می دهیم و
بترتیب می خوانیم: رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.
ریشه های دوم ۰/۱ عبارت است از:

$$\sqrt{0/1} = 0/1 \text{ و } -\sqrt{0/1} = -0/1$$

زیرا:

$$(0/1) \times (0/1) = 0/1 \text{ و } (-0/1) \times (-0/1) = 0/1$$

ریشه های دوم ۲ عبارت است از $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ همان جذر
عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی، می توان حساب کرد).

ریشه های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و
 $-\sqrt{a}$ نشان می دهیم. $\sqrt{a}$ ریشه دوم مثبت و $-\sqrt{a}$ ریشه دوم
منفی است.

به طور کلی، اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و
 $x^2 = a$ باشد، داریم:

$$x = \sqrt{a} \text{ و } x = -\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

به بیان دیگر، اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد، b را ریشه
دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه:

$$b^2 = a \quad (a \geq 0)$$

مثال: ریشه های دوم عددهای ۳۶، ۹، ۱۰۰، ۰/۰۰۰۱،

$$\frac{9}{16}, \frac{4}{81}, 1, 2, -4, -100, \text{ و } \frac{-1}{9} \text{ را در صورت}$$

وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{36} = \pm 6, \pm\sqrt{9} = \pm 3, \pm\sqrt{100} = \pm 10,$$

$$\pm\sqrt{0/0001} = \pm 0/01, \pm\sqrt{0/81} = \pm 0/9,$$

$$\pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}, \pm\sqrt{\frac{4}{81}} = \pm\frac{2}{9}, \pm\sqrt{1} = \pm 1,$$

$$\pm\sqrt{2} \approx \pm 1/414$$

عددهای ۴، -۱۰۰، و $\frac{-1}{9}$ ، چون اعدادی منفی هستند، ریشه
دوم ندارند.

توجه: ریشه دوم مثبت عدد $(-2)^2$ یا ۴، برابر ۲ است؛ یعنی:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

و ریشه دوم منفی آن، برابر -۲ است؛ یعنی:

می گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی توان $\sqrt{2}$ را
به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. تعداد
عددهای گنگ، بی نهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد
گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد
گنگ، بی نهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعه همه عددهای
گویا و گنگ را، مجموعه عددهای حقیقی (IR) می نامند.

ریشه دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمتر مربع است، طول ضلع مربع چند
سانتیمتر است؟ برای حل این مسأله، طول ضلع مربع را x سانتیمتر
فرض می کنیم؛ در این صورت، مساحت مربع x^2 خواهد بود:

$$x^2 = 16 \quad (1)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم
که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت، ملاحظه می شود که دو
عدد ۴ و -۴ وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است؛ زیرا:

$$4^2 = 16 \text{ و } (-4)^2 = 16$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی تواند باشد، بنابراین طول ضلع
مربع، یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می شود:

$$x = 4$$

عددهای ۴ و -۴ را ریشه دوم عدد ۱۶ می نامند.

ریشه های دوم عدد $\frac{1}{16}$ ، عددهای $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ می باشند؛

زیرا:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

ریشه دوم ۰ نیز ۰ است؛ زیرا:

$$0^2 = 0$$

آیا عدد ۱۶ ریشه دوم دارد؟

عدد ۱۶ ریشه دوم ندارد؛ زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و
-۴ یا هر عدد حقیقی دیگر، ریشه دوم ۱۶ باشد، باید توان دوم
این عددها (۴ و -۴ یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشه دوم ۱۶
فرض می شود) برابر ۱۶ شود؛ ولی می دانیم که توان دوم هر
عدد حقیقی، هیچ گاه عدد منفی نیست؛ از این رو عدد ۱۶ ریشه
دوم حقیقی ندارد و به همین دلیل:

عددهای منفی، ریشه دوم حقیقی ندارند.

حقیقی a و b ، اگر $a^n = b$ و n عددی فرد باشد :
 $a = \sqrt[n]{b}$

و اگر n عددی زوج و $b \geq 0$:
 $|a| = \sqrt[n]{b}$

برای مثال :

$$(-2)^3 = -8 : \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$2^5 = 32 : \sqrt[5]{32} = 2$$

$$2^6 = 64 : \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} : \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$$

عبارتهایی مانند :

$$\sqrt[4]{-2}, \sqrt{-81}, \sqrt[5]{-10^5}, \sqrt[4]{-2^8}, \sqrt[4]{-16}, \sqrt[6]{-64}$$

و $\sqrt[10]{-1}$ عدد حقیقی نیستند ؛ زیرا عددهای منفی، ریشه زوج ندارند.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$1) \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} \quad 2) \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81}$$

$$3) 2 + \sqrt[3]{-8} \quad 4) 2\sqrt{5^2} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[4]{625}$$

$$1) \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2} \quad \text{حل:}$$

$$2) \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81} = \sqrt{(-3)^4} - 9 = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$3) 2 + \sqrt[3]{-8} = 2 + \sqrt[3]{(-2)^3} = 2 - 2 = 0$$

$$4) 2\sqrt{5^2} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[4]{625} = 2 \times 5 - \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[4]{5^4} = 10 - 3 - 5 = 2$$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان n ام عدد حقیقی a باشد، k را توان n ام کامل a می نامند ؛ برای مثال : «۲۵ توان دوم کامل ۵+ یا ۵-»، «۸ توان سوم کامل ۲»، «۶۲۵ توان چهارم کامل ۵+ یا ۵-»، «۳۲ توان پنجم کامل ۲» و «۶۴ توان ششم کامل ۲+ یا ۲-».

$$-\sqrt{(-2)^2} = -\sqrt{4} = -2$$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-9)^2}$ و $\sqrt{-9^2}$ یکی نیست ؛ زیرا :

$$\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ و } \sqrt{-9^2} = \sqrt{-81}$$

(عدد ۸۱- ریشه دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشه دوم مثبت $(-9)^2$ برابر ۹ است و -9^2 ریشه دوم حقیقی ندارد.

محاسبه $\sqrt{x^2}$

برای مثال، عبارت $\sqrt{x^2}$ را به ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می کنیم :

$$x = 4 : \sqrt{x^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$x = 0/2 : \sqrt{x^2} = \sqrt{0/2^2} = 0/2$$

$$x = -5 : \sqrt{x^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$x = \frac{-2}{3} : \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

ریشه n ام یک عدد

به همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشه دوم را تعریف کردیم، می توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان n ام (n عدد طبیعی)، ریشه های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشه n ام را تعریف کرد.

مثال:

از $5^2 = 25$ نتیجه می شود $\sqrt{25} = 5$ و می خوانیم «ریشه سوم ۲۵ برابر ۵ است».

از $2^4 = 16$ نتیجه می شود $\sqrt[4]{16} = 2$ و می خوانیم «ریشه چهارم ۱۶ برابر ۲ است».

از $3^5 = 243$ نتیجه می شود $\sqrt[5]{243} = 3$ و می خوانیم «ریشه پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است».

از $2^6 = 64$ نتیجه می شود $\sqrt[6]{64} = 2$ و می خوانیم «ریشه ششم ۶۴ برابر ۲ است».

به طور کلی :

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲، ($n \geq 2$) و عددهای

و عبارتهای رادیکالی زیر، در مجموعه عددهای حقیقی (IR) بی معنا هستند:

$$\sqrt{-4}, \sqrt[6]{-64}, \sqrt[5]{\sqrt[3]{-4}}, \sqrt{-x^2-1},$$

$$\sqrt[8]{\frac{-1}{x^2}}, \sqrt[3]{-\sqrt{-2}}$$

مثال: عبارتهای زیر، به ازای چه مقادیری از مجموعه عددهای حقیقی (IR) معنا دارند؟

$$۱) \sqrt{x} \quad ۲) \sqrt{-x} \quad ۳) \sqrt{x^2} \quad ۴) \sqrt{-\sqrt{x}} \quad ۵) \sqrt[4]{-x^2-1}$$

حل: ۱) $\sqrt{x}$ به ازای هر $x \geq 0$ معنا دارد.

۲) $\sqrt{-x}$ به ازای هر $-x \geq 0$ یا $x \leq 0$.

۳) $\sqrt{x^2}$ به ازای هر $x^2 \geq 0$ یا $x \in \mathbb{R}$.

۴) $\sqrt{-\sqrt{x}}$ به ازای هر $-\sqrt{x} \geq 0$ یا $x \leq 0$.

۵) $\sqrt[4]{-x^2-1}$ به ازای هر عدد حقیقی بی معناست، پس: $x \in \emptyset$ (x متعلق مجموعه تهی است).

مثال: عبارت $\sqrt[4]{\frac{x+x^2}{x^2+1}}$ به ازای چه مقادیری از x، معنا دارد؟

حل:

$$\text{معنا} \quad \frac{x+x^2}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x \geq 0 \quad \text{به ازای هر } x \geq 0 \quad \sqrt[4]{\frac{x+x^2}{x^2+1}} \text{ دارد.}$$

قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی دارد و حمید ۲۰۰ ریال قرض دارد. در این جا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ درحالی که علی ۲۰۰ + ریال و حمید ۲۰۰ - ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) مورد نظر نباشد، می گوییم با قدرمطلق عدد روبه رو هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره خط راست کوتاه و موازی که در دو طرف عدد قرار می دهیم، استفاده می کنیم؛ بنابراین:

$$|-200| = 200, \quad |200| = 200$$

به بیان ساده تر، می توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد،

۲- «می باشد.

به همین ترتیب، اگر عبارت جبری D توان nام عبارت جبری A باشد، D را توان nام کامل A می نامند؛ برای مثال:

« $(a+b)^2$ یا $a^2 + 2ab + b^2$ » توان دوم کامل $(a+b)$ یا « $(a-b)^3$ یا $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ » توان سوم کامل $(a-b)$ ، « x^4 » توان هفتاد و چهارم کامل x یا « $-x$ » توان ششم کامل (a^2bc^3) می باشد. بنابراین، هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجه رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می آید؛ برای مثال:

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2, \quad \sqrt[4]{5^4} = 5, \quad \sqrt[3]{x^9} = \sqrt[3]{(x^3)^3} = x^3, \\ \sqrt[5]{a^{10}b^{12}c^{15}} = \sqrt[5]{(a^2b^4c^3)^5} = a^2b^4c^3, \quad \sqrt[6]{v^6} = v, \\ \sqrt[75]{(x^3+1)^{75}} = x^3+1$$

توجه:

۱) اگر فرجه رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می آید، نمی تواند منفی باشد؛ برای مثال:

$$\sqrt[3]{(-10)^{10}} = -(-10) = 10 \quad \text{و}$$

$$\sqrt[4]{(-2)^{12}} = -(-2) = 2$$

$$\sqrt[4]{(-2)^8} = -(-2) = 2$$

$$\sqrt[2k]{(-5)^{2k}} = -(-5) = 5 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3} = \sqrt[6]{(-4)^6} = -(-4) = 4$$

$$\sqrt[2k]{x^{2k}} = \sqrt[2k]{(x^2)^k} = x^2$$

$$\sqrt[2k]{(-a)^{2k}} = \sqrt[2k]{((-a)^2)^k} = \sqrt[2k]{(a^2)^k} = a^2$$

$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{12}} = \sqrt[4]{(a^2b^4c^3)^4} = a^2b^4c^3$$

$$\sqrt{x^4+2x^2+1} = \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$$

۲) اگر عددها یا عبارتهای جبری زیر رادیکال، مضربی صحیح از فرجه رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می نامند؛ برای مثال:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{34}, \sqrt{x^2+1}, \sqrt[4]{(x^2+1)^3}, \sqrt[7]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجه رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت، آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعه عددهای حقیقی (IR) بی معناست. برای مثال، تمام عددها

$$۵) \left| \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2} \right| \quad ۶) \left| |3 - \sqrt{10}| - |4 + \sqrt{10}| \right|$$

$$۷) \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2}$$

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$۱) \left| -\sqrt{2} \right| = \sqrt{2}$$

$$۲) \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{4-9}{6} \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \frac{5}{6}$$

$$۳) \left| -\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right| = \left| \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right| = \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}$$

$$۴) \left| 7 - \sqrt{50} \right| = \left| -(\sqrt{50} - 7) \right| = \left| \sqrt{50} - 7 \right| = \sqrt{50} - 7$$

$$۵) \left| \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2} \right| = \left| |-3| - |-5| \right| = \left| 3 - 5 \right| = \left| -2 \right| = 2$$

$$۶) \left| |3 - \sqrt{10}| - |4 + \sqrt{10}| \right| = \left| |-(\sqrt{10} - 3)| - (4 + \sqrt{10}) \right| \\ = \left| |\sqrt{10} - 3| - 4 - \sqrt{10} \right| \\ = \left| \sqrt{10} - 3 - 4 - \sqrt{10} \right| = \left| -7 \right| = 7$$

$$۷) \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} = \left| \sqrt{3} - 4 \right| = \left| -(4 - \sqrt{3}) \right| \\ = \left| 4 - \sqrt{3} \right| = 4 - \sqrt{3}$$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

$$۱) \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} \Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$۲) \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \Rightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$۳) \sqrt{x^{2n}} = \sqrt{(x^n)^2} = (\sqrt{x^2})^n \Rightarrow |x^n| = |x|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|5x^2|$ و $\frac{|x|}{x}$ را پیدا کنید.

($x \neq 0$)

$$۱) \left| -5x^2 \right| = \left| -5 \right| |x^2| = 5x^2$$

حل:

$$۲) \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

مقدار عددی آن، با علامت مثبت است؛ زیرا وقتی می نویسیم 200 ، منظور ما در واقع $+200$ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $7 - \sqrt{5}$ ، $+\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ را بیاید.

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ و } \sqrt{5} - 2$$

حل:

$$\left| -\sqrt{2} \right| = \sqrt{2}, \quad \left| +\sqrt{2} \right| = \sqrt{2}$$

می دانیم $7 > \sqrt{5}$ ؛ پس: $7 - \sqrt{5} > 0$ ، بنابراین قدرمطلق عدد

$7 - \sqrt{5}$ با خودش برابر است:

$$\left| 7 - \sqrt{5} \right| = 7 - \sqrt{5}$$

همچنین می دانیم $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ ؛ پس: $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ ، بنابراین

قدرمطلق عدد $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ با خودش برابر است:

$$\left| \sqrt{3} - \sqrt{2} \right| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

و همین طور:

$$\sqrt{5} > 2; \quad \sqrt{5} - 2 > 0; \quad \left| \sqrt{5} - 2 \right| = \sqrt{5} - 2$$

با توجه به مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می توان به

شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

تعبیر برابری (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر است؛ ولی اگر a عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینه آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{9}$ با ریشه دوم ۹ فرق دارد:

ریشه دوم عدد ۹، می تواند $+3$ یا -3 باشد؛ ولی $\sqrt{9}$ همیشه برابر ۳؛ یعنی قدرمطلق $+3$ و -3 می باشد:

$$\sqrt{9} = \sqrt{(\pm 3)^2} = |\pm 3| = 3$$

به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (۲)$$

برابری (۲) نشان می دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید.

$$۱) \left| -\sqrt{2} \right|$$

$$۲) \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right|$$

$$۳) \left| -\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right|$$

$$۴) \left| 7 - \sqrt{50} \right|$$