



رادیكال

(قسمت اول)

● سید محمد رضا هاشمی موسوی

◀ عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{2}$ است؛ که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که دقیقاً برابر $\sqrt{2}$ باشد، زیرا:

$$1/4^2 = 1/96 < 2 < 1/5^2 = 2/25$$

$$1/41^2 = 1/9881 < 2 < 1/42^2 = 2/0164$$

$$1/414^2 = 1/999396 < 2 < 1/415^2 = 2/002225$$

$$1/4142^2 = 1/99996164 < 2 < 1/4143^2 = 2/00024449$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به یک عدد دهنده نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد. به عبارت دیگر اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{2}$ را به صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در اینجا این مطلب را با روش «برهان خلف» به اثبات می‌رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده‌شده‌ی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به هم، اول باشند. به بیان دیگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n ، هر دو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{2}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad (1)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش پذیر است، پس باید m^2 ، یعنی m هم بر ۲ بخش پذیر باشد و داشته باشیم:

$$m = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

در برابری (۱)، $2k$ را به جای m می‌گذاریم:

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \quad (2)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش پذیر است. ولی از آنجا که m و n را نسبت به هم اول گرفته بودیم، نتیجه می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{2}$ را به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بینهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بینهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعه همه عددهای گویا و گنگ را، مجموعه عددهای حقیقی (IR) می‌نامند.

◀ ریشه دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمتر مربع است، طول ضلع مربع چند سانتیمتر است؟

برای حل این سؤاله طول ضلع مربع را x سانتیمتر فرض می‌کنیم، در این صورت مساحت مربع x^2 خواهد بود:

$$x^2 = 16 \quad (1)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و -۴ وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است، زیرا:

$$4^2 = 16 \quad \text{و} \quad (-4)^2 = 16$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود: $x = 4$

حل:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{36} &= \pm 6, \quad \pm\sqrt{9} = \pm 3, \quad \pm\sqrt{100} = \pm 10, \\ \pm\sqrt{0.0001} &= \pm 0.01 \\ \pm\sqrt{0.81} &= \pm 0.9, \quad \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}, \quad \pm\sqrt{\frac{4}{81}} = \pm \frac{2}{9}, \\ \pm\sqrt{1} &= \pm 1, \quad \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.4142 \end{aligned}$$

عددهای ۴- و ۱۰۰- و $\frac{-1}{9}$ ، چون عددی منفی هستند، ریشه دوم ندارند.

مثال ۲: حاصل عبارتهای

$$\begin{aligned} \sqrt{0.04}, \sqrt{144}, (\sqrt{36})^2, \sqrt{169} \\ \sqrt{-1}, \sqrt{-16}, \sqrt{-9^2}, \sqrt{(-2)^2}, \\ -\sqrt{(-9)^2}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{\frac{16}{81}}, \sqrt{-(-9)^2}, \sqrt{-(-2)^2} \end{aligned}$$

را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt{169} &= \sqrt{13^2} = 13, (\sqrt{36})^2 = (6)^2 = 36, \\ \sqrt{144} &= \sqrt{12^2} = 12, \sqrt{0.04} = \sqrt{(0.2)^2} = 0.2, \\ \sqrt{\frac{16}{81}} &= \sqrt{\frac{4^2}{9^2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{4}{9}, \\ \sqrt{\frac{25}{4}} &= \sqrt{\frac{5^2}{2^2}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}, \\ -\sqrt{(-9)^2} &= -\sqrt{81} = -9, \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \\ \sqrt{-(-9)^2} &= \sqrt{-81} = \sqrt{(-9^2)} = \sqrt{(3^2)^2} = \sqrt{(3^2)^2} = 3^2 = 9 \\ \sqrt{-(-2)^2} &= \sqrt{-4}, \sqrt{-1}, \sqrt{-16}, \sqrt{-9^2} = \sqrt{-81} \end{aligned}$$

عددهای ۸۱-، ۹-، ۱-، ۴- و ۲- ریشه دوم حقیقی می‌باشند. زیرا عددهای منفی جذر و ریشه دوم حقیقی ندارند.

توجه: ریشه دوم مثبت عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲ است، یعنی:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

و ریشه دوم منفی عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲- است، یعنی:

$$-\sqrt{(-2)^2} = -\sqrt{4} = -2$$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{-9^2}$ و $\sqrt{(-9)^2}$ یکی نیست.

عددهای ۴ و ۴- را ریشه دوم عدد ۱۶ می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{16}$ عددهای $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ می‌باشند، زیرا:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

ریشه دوم ۰ نیز ۰ است، زیرا:

$$0^2 = 0$$

آیا عدد ۱۶- ریشه دوم دارد؟

عدد ۱۶- ریشه دوم ندارد، زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴- و یا هر عدد حقیقی دیگر ریشه دوم ۱۶- باشد، باید توان دوم این عددها (۴ و ۴- و یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشه دوم ۱۶- فرض می‌شود) مساوی ۱۶- شود؛ ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی هیچگاه عدد منفی نیست؛ از این رو عدد ۱۶- ریشه دوم حقیقی ندارد. و به همین دلیل:

اعداد منفی ریشه دوم حقیقی ندارند.

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴- ریشه‌های دوم ۱۶ می‌باشند.

ریشه‌های دوم ۱۶ را با $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ نشان می‌دهیم و به ترتیب می‌خوانیم رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم 0.01 عبارتند از:

$$\sqrt{0.01} = 0.1 \quad \text{و} \quad -\sqrt{0.01} = -0.1$$

زیرا:

$$(0.1) \times (0.1) = 0.01 \quad \text{و} \quad (-0.1) \times (-0.1) = 0.01$$

ریشه‌های دوم ۲ عبارتند از $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$. همان جذر عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی می‌توان حساب کرد.

ریشه‌های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشه دوم مثبت a و $-\sqrt{a}$ ریشه دوم منفی a است. به‌طور کلی اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^2 = a$ باشد، داریم:

$$x = \sqrt{a} \quad \text{و} \quad x = -\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

به بیان دیگر اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد؛ b را ریشه دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه $b^2 = a$ ($a \geq 0$)

مثال ۱: ریشه‌های دوم عددهای ۳۶، ۹ و ۱۰۰ و 0.0001 و 0.81 و $\frac{9}{16}$ و $\frac{4}{81}$ و ۱ و ۲ و ۴ و ۱۰۰ و $-\frac{1}{9}$ را در صورت وجود بیابید.

$$= 15 + 4 - 12 = 7$$

$$2) \sqrt[2]{\frac{25}{36}} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} = 2\left(\frac{5}{6}\right) - \left(-\left(-\frac{5}{6}\right)\right) = \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = \frac{10-5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$3) 4\sqrt{(0/0.1)^2} - 4\sqrt{(-0/0.1)^2} - 20\sqrt{\frac{1}{100}} + \sqrt{4}$$

$$= 4(0/0.1) - 4(-0/0.1) - 20\left(\frac{1}{10}\right) + 2$$

$$= 0.4 - 0.4 - 2 + 2 = 0$$

$$4) \sqrt{1\frac{16}{9}} - \sqrt{\left(-\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} - \left(-\left(-\frac{5}{9}\right)\right) = \frac{5}{3} - \frac{5}{9} = \frac{15-5}{9} = \frac{10}{9}$$

مثال ۴: کدام یک از تساویهای زیر به ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است.

$$1) -\sqrt{x} = 7$$

$$2) \sqrt{x} + 4 = 0$$

$$3) \sqrt{(-x^2)^2} = -x^2$$

$$4) \sqrt{x^2} = x^2$$

حل: فقط تساوی $\sqrt{x^2} = x^2$ درست است. زیرا در تساوی $-\sqrt{x} = 7$ طرف اول تساوی یعنی $-\sqrt{x}$ ، به ازای هر x حقیقی مثبت، همواره منفی است و طرف دوم عددی است مثبت که در نتیجه این تساوی در مجموعه اعداد حقیقی غیرممکن است. تساوی $\sqrt{x} + 4 = 0$ نیز در مجموعه اعداد حقیقی غیرممکن است، زیرا طرف اول تساوی عبارت $\sqrt{x} + 4$ به ازای هر x حقیقی مثبت، همواره مثبت و مخالف صفر است. همچنین تساوی $\sqrt{(-x^2)^2} = -x^2$ فقط به ازای $x = 0$ برقرار است. زیرا طرف اول تساوی یعنی $\sqrt{(-x^2)^2} = \sqrt{x^2} = x^2$ همواره مثبت است و طرف دوم تساوی یعنی $-x^2$ ، همواره منفی است. بدیهی است تساوی $\sqrt{x^2} = x^2$ به ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است، زیرا:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$$

مثال ۵: عبارت $\sqrt{(x^2-1)^2}$ را به ازای $x=1$ ، $x=-2$ ، $x=0$ ، $x=0/1$ و $x=-\frac{1}{4}$ ، $x=4$ ، $x=-\sqrt{3}$ ، $x=\sqrt{2}$ حساب کنید.

زیرا:

$$\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9, \sqrt{-9^2} = \sqrt{-81}$$

(عدد ۸۱ - ریشه دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشه دوم مثبت $(-9)^2$ برابر ۹ است و -9^2 ریشه دوم حقیقی ندارد.

محاسبه $\sqrt{x^2}$

برای مثال عبارت $\sqrt{x^2}$ را به ازای برخی از مقادیر مختلف x

محاسبه می‌کنیم:

$$x=4 : \sqrt{x^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$x=0/2 : \sqrt{x^2} = \sqrt{0/2^2} = 0/2$$

$$x=-5 : \sqrt{x^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$x=-\frac{2}{3} : \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

با دقت در محاسبات اخیر ملاحظه می‌شود که در محاسبه $\sqrt{x^2}$ اگر به جای x اعداد مثبت یا صفر قرار دهیم، $\sqrt{x^2} = x$ است و اگر به جای x عددهای منفی قرار دهیم، $\sqrt{x^2} = -x$ می‌باشد. اگر x عددی مثبت یا صفر باشد ($x \geq 0$)، داریم: $\sqrt{x^2} = x$ و اگر x عددی منفی باشد ($x < 0$)، داریم: $\sqrt{x^2} = -x$ برای مثال:

$$\sqrt{(+5)^2} = +5, \sqrt{(-7)^2} = -(-7) = 7$$

$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2} = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \sqrt{\left(+\frac{4}{9}\right)^2} = +\frac{2}{3}$$

$$-\sqrt{\left(-\frac{5}{7}\right)^2} = -\left(-\left(-\frac{5}{7}\right)\right) = -\frac{5}{7}, -\sqrt{(-5)^2} = -(-(-5)) = -5$$

مثال ۳: حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید:

$$1) 5\sqrt{9} + \sqrt{(-4)^2} - 4\sqrt{(-3)^2}$$

$$2) 2\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$3) 4\sqrt{(0/0.1)^2} - 4\sqrt{(-0/0.1)^2} - 20\sqrt{\frac{1}{100}} + \sqrt{4}$$

$$4) \sqrt{1\frac{16}{9}} - \sqrt{\left(-\frac{5}{9}\right)^2}$$

حل:

$$1) 5\sqrt{9} + \sqrt{(-4)^2} - 4\sqrt{(-3)^2} = 5(3) - (-4) - 4(-(-3))$$

و همین طور:

$$\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0 \Rightarrow |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

با توجه به مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می‌توان به شکل
برابری زیر نشان داد:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

تعبیر تساوی (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد،
قدرمطلق آن با خودش برابر است. ولی اگر a عددی منفی باشد،
قدرمطلق آن، برابر با قرینه آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{9}$ با ریشه دوم ۹ فرق دارد:

ریشه دوم عدد ۹، می‌تواند $+3$ یا -3 باشد، ولی $\sqrt{9}$ فقط
برابر ۳ یعنی قدرمطلق $+3$ و -3 می‌باشد:

$$\sqrt{9} = \sqrt{(\pm 3)^2} = |\pm 3| = 3$$

به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (۲)$$

تساوی (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت، همیشه برابر
یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) |-\sqrt{2}| & ۲) \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| \\ ۳) \left| -\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right| & ۴) |7 - \sqrt{50}| \\ ۵) \left| \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2} \right| & ۶) |3 - \sqrt{10}| - |4 + \sqrt{10}| \\ ۷) \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} \end{array}$$

حل: با توجه به تعریف قدرمطلق داریم:

$$\begin{array}{ll} ۱) |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \\ ۲) \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{4-9}{6} \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \frac{5}{6} \\ ۳) \left| -\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right| = \left| \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \right| = \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} \\ ۴) |7 - \sqrt{50}| = |-(\sqrt{50} - 7)| = |\sqrt{50} - 7| \\ \quad = \sqrt{50} - 7 \\ ۵) \left| \sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2} \right| = \left| |-3| - |-5| \right| = \left| 3 - 5 \right| \\ \quad = |-2| = 2 \\ ۶) |3 - \sqrt{10}| - |4 + \sqrt{10}| \end{array}$$

حل:

$$x=0: \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{(-1)^2} = -(-1) = 1$$

$$x=-2: \sqrt{(4-1)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

$$x=1: \sqrt{(1-1)^2} = \sqrt{0^2} = 0$$

$$x=\sqrt{2}: \sqrt{(2-1)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$x=-\sqrt{3}: \sqrt{(3-1)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$x=4: \sqrt{(16-1)^2} = \sqrt{15^2} = 15$$

$$x=-\frac{1}{2}: \sqrt{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$x=0.1: \sqrt{(0.01-1)^2} = \sqrt{(-0.99)^2} = -(-0.99) = 0.99$$

◀ قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی و حمید ۲۰۰ ریال مقروض است. در
اینجا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ در حالی که
علی $+200$ ریال و حمید -200 ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت
یا منفی بودن آن) موردنظر نباشد، گوییم با قدرمطلق عدد روبرو
هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و
موازی که در دو طرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$|-200| = 200 \quad \text{و} \quad |+200| = 200$$

به بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد، مقدار
عددی آن، با علامت مثبت است. زیرا وقتی می‌نویسیم ۲۰۰، منظور
ما در واقع $+200$ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $-\sqrt{2}$ ، $+\sqrt{2}$ ، $7-\sqrt{5}$ ، $7-\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}-2$
را بیابید.

حل:

$$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad |+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

می‌دانیم $7 > \sqrt{5}$ ، پس: $7 - \sqrt{5} > 0$ ، بنابراین قدرمطلق عدد
 $7 - \sqrt{5}$ با خودش برابر است:

$$|7 - \sqrt{5}| = 7 - \sqrt{5}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ ، پس: $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ ، بنابراین قدرمطلق
عدد $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

برابر ۲ است.

به طور کلی:

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ ($n \geq 2$) و عددهای حقیقی a و b ، اگر $a^n = b$ باشد، و n عددی فرد باشد:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq 0$ باشد:

$$|a| = \sqrt[n]{b}$$

برای مثال:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ زیرا } (-2)^3 = -8 \text{ است.}$$

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ زیرا } 2^5 = 32 \text{ است.}$$

$$\sqrt[6]{64} = 2, \text{ زیرا } 2^6 = 64 \text{ است.}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}, \text{ زیرا } \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \text{ است.}$$

عبارتهایی مانند: $\sqrt[10]{-1}, \sqrt[7]{-2}, \sqrt{-81}, \sqrt[10]{-10}, \sqrt[4]{-2^8}, \sqrt[4]{-16}, \sqrt[6]{-64}$

$$\sqrt[4]{-2^8}, \sqrt[4]{-16}, \sqrt[6]{-64}$$

عدد حقیقی نیستند. زیرا عددهای منفی ریشه زوج ندارند.

مثال ۶: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$۱) \sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$$

$$۲) \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81}$$

$$۳) 2 + \sqrt[3]{-8}$$

$$۴) 2\sqrt{5^2} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[4]{625}$$

$$۵) -\sqrt[11]{(-7)(-7)^3(-7)^3(-7)^5}$$

$$۶) -\sqrt[3]{6 \times (-4)(-9)}$$

$$۷) \sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{(-4)^3}$$

$$۸) \sqrt[3]{8} \times \sqrt[4]{2 \times 4 \times 8}$$

$$۹) \sqrt[3]{-8} - \sqrt[4]{4}$$

$$۱۰) 2\sqrt[3]{64} - \sqrt{16}$$

حل:

$$۱) \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{(-\frac{1}{2})^5} = -\frac{1}{2}$$

$$۲) \sqrt{(-3)(-3)^3} - \sqrt{81} = \sqrt{(-3)^4} - 9 = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

$$۳) 2 + \sqrt[3]{-8} = 2 + \sqrt[3]{(-2)^3} = 2 - 2 = 0$$

$$۴) 2\sqrt{5^2} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[4]{625} = 2 \times 5 - \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[4]{5^4} = 10 - 3 - 5 = 2$$

$$۵) -\sqrt[11]{(-7)(-7)^3(-7)^3(-7)^5} = -\sqrt[11]{(-7)^{11}} = -(-7) = 7$$

$$= |-(\sqrt{10}-3)| - (4+\sqrt{10})|$$

$$= |\sqrt{10}-3-4-\sqrt{10}| = |\sqrt{10}-3-4-\sqrt{10}|$$

$$= |-7| = 7$$

$$۷) \sqrt{(\sqrt{3}-4)^2} = |\sqrt{3}-4| = |-(4-\sqrt{3})|$$

$$= |4-\sqrt{3}| = 4-\sqrt{3}$$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

$$۱) \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} \Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$۲) \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$۳) \sqrt{x^{2n}} = \sqrt{(x^n)^2} = (\sqrt{x^2})^n$$

$$\Rightarrow |x^n| = |x|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|x^2|$ و $|-5x^2|$ و $|\frac{-y}{x^4}|$ و $|\frac{|x|}{x}|$ و $|(-13)^{75}|$ را پیدا کنید ($x \neq 0$).

حل:

$$۱) |-5x^2| = |-5| \cdot |x^2| = 5x^2$$

$$۲) \left|\frac{-y}{x^4}\right| = \frac{|-y|}{|x^4|} = \frac{y}{x^4}$$

$$۳) \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$۴) |(-13)^{75}| = |(-13)|^{75} = 13^{75}$$

ریشه nام یک عدد

به همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشه دوم را تعریف کردیم؛ می توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان n ام (n عدد طبیعی)، ریشه های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشه n ام را تعریف کرد.

مثال:

از $5^2 = 125$ نتیجه می شود $\sqrt[2]{125} = 5$ و می خوانیم «ریشه سوم ۱۲۵ برابر ۵ است».

از $2^4 = 16$ نتیجه می شود $\sqrt[4]{16} = 2$ و می خوانیم «ریشه چهارم ۱۶ برابر ۲ است».

از $3^5 = 243$ نتیجه می شود $\sqrt[5]{243} = 3$ و می خوانیم «ریشه پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است».

از $2^6 = 64$ نتیجه می شود $\sqrt[6]{64} = 2$ و می خوانیم «ریشه ششم ۶۴

$$\sqrt[k]{(-5)^k} = -(-5) = 5 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\sqrt[k]{(-a)^{ak}} = \sqrt[k]{((-a)^k)^k} = \sqrt[k]{(a^k)^k} = a^k,$$

$$\sqrt[k]{x^{fk}} = \sqrt[k]{(x^f)^k} = x^f$$

$$\sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1,$$

$$\sqrt{a^8 b^{16} c^{40}} = \sqrt{(a^2 b^4 c^{10})^4} = a^2 b^4 c^{10}.$$

(۲) اگر اعداد و یا عبارات جبری زیر رادیکال مضربی صحیح از فرجه رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می نامند. به طور مثال:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[5]{34}, \sqrt{x^2+1}, \sqrt[4]{(x^2+1)^3}, \sqrt[7]{2^{75}}$$

(۳) اگر فرجه رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعه اعداد حقیقی (IR) بی معنی است. برای مثال تمام اعداد و عبارات رادیکالی زیر در مجموعه اعداد حقیقی (IR) بی معنی می باشند:

$$\begin{aligned} &\sqrt{-4}, \sqrt[3]{-81}, \sqrt[5]{-64}, \sqrt[7]{-2^8}, \\ &\sqrt[20]{-5^{20}}, \sqrt[100]{-10^{100}}, \\ &\sqrt[3]{-\sqrt{-4}}, \sqrt[5]{-1}, \sqrt[7]{-2^{2k}} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ &\sqrt[2k]{-5^{2k}}, \sqrt[2k]{-(-2)^{2k}}, \sqrt[5]{2\sqrt[3]{-16}}, \\ &\sqrt[4]{-(x^2+1)^4} \quad (x \in \mathbb{R}), \sqrt[3]{-(x^2+4)}, \\ &\sqrt[4]{-(x^2+2)}, \sqrt[6]{-4x^2-8}, \\ &\sqrt{-(x^2+2x^2+1)}, \sqrt[10]{\frac{-1}{2x^2+1}}, \sqrt[2]{\frac{-16}{(x^2+1)^4}}, \\ &\sqrt[7]{\frac{-1}{x^{72}}}, \sqrt{-\sqrt[4]{(x^2+1)^4}} \end{aligned}$$

$$۶) -\sqrt{6 \times (-4)(-9)} = -\sqrt{6 \times 36} = -\sqrt{6^2} = -6$$

$$۷) \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[5]{2^5} - \sqrt[4]{16} = 2 - \sqrt[4]{2^4} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{aligned} ۸) \sqrt[3]{8} \times \sqrt[6]{2 \times 4 \times 8} &= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[6]{2 \times 2^2 \times 2^3} \\ &= 2 \times \sqrt[6]{2^6} = 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

$$۹) \sqrt[3]{-8} - \sqrt[4]{4} = \sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt[4]{2^2} = -2 - 2 = -4$$

$$\begin{aligned} ۱۰) 2\sqrt[3]{64} - \sqrt{16} &= 2\sqrt[3]{4^3} - \sqrt{4^2} \\ &= 2 \times 4 - 4 = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان n ام عدد حقیقی a باشد، k را توان n ام کامل a می نامند. به طور مثال: ۲۵ توان دوم کامل ۵ یا ۵- و ۸ توان سوم کامل ۲ و ۶۲۵ توان چهارم کامل ۵ یا ۵- و ۳۲ توان پنجم کامل ۲ و ۶۴ توان ششم کامل ۲ یا ۲- می باشد. به همین ترتیب اگر عبارت جبری D توان n ام عبارت جبری A باشد، D را توان n ام کامل A می نامند. به طور مثال:

• $a^2 + 2ab + b^2$ یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا $-(a+b)$ و $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$ و $x^{18} a^{12} b^{16} c^{18}$ توان ششم x^3 و x^{74} توان هفتاد و چهارم کامل x یا $-x$ و $a^4 b^4 c^4$ کامل $a^2 b^2 c^2$ می باشد. بنابراین هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجه رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می آید. به طور مثال:

$$\sqrt[6]{\sqrt[6]{6}} = \sqrt[6]{6}, \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2, \sqrt[7]{5^7} = 5,$$

$$\sqrt[3]{x^9} = \sqrt[3]{(x^3)^3} = x^3$$

$$\sqrt[5]{(x^2+1)^{50}} = x^2+1,$$

$$\sqrt[5]{a^{10} b^{20} c^{35}} = \sqrt[5]{(a^2 b^4 c^7)^5} = a^2 b^4 c^7$$

توجه:

(۱) اگر فرجه رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می آید نمی تواند منفی باشد. به طور مثال:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = -(-2) = 2, \sqrt[10]{(-10)^{10}} = -(-10) = 10,$$

$$\sqrt[7]{(-2)^{74}} = -(-2) = 2$$

$$\sqrt[6]{(-4)(-4)(-4)^2} = \sqrt[6]{(-4)^6} = -(-4) = 4,$$