

[a]

رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی

(برای دانش آموزان سال دوم ریاضی فیزیک و سوم ریاضی نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

$$\Rightarrow x - z = mk_p \Rightarrow xRz \quad (\text{خاصیت تعدی دارد})$$

بنابراین رابطه R یک رابطه هم‌ارزی است.

(لازم است توضیح دهیم که رابطه R در مثال قبل به رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m معروف است.)

خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی در یک رابطه هم‌ارزی مانند:

R که روی مجموعه A تعریف شده و ارتباط بین این ۳ خاصیت می‌تواند بین اعضای A که باهم رابطه R داشته باشند، ارتباط خاصی برقرار کند. به عنوان مثال اگر در مثال قبل قرار دهیم، $m = ۳$ داریم:

$$\forall x, y \in Z, xRy \Leftrightarrow x - y = ۳ \quad (k \in Z)$$

درحقیقت اعدادی از Z باهم رابطه R دارند که تفاضل آنها مضرب ۳ باشد مثلاً: $۱۵ - ۶ = ۹$ زیرا $۱۵ - ۶ = ۳ \times ۳$ یا $۱۵ - ۶ = ۳ \times (-۳)$ حال اگر a عضوی از Z بوده و همه اعداد صحیح که با a رابطه R دارند (تفاضل هریک از آنها با a مضرب ۳ باشد) را در نظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را کلاس هم‌ارزی a می‌نامند و بانماد $[a]$ نمایش می‌دهند، درحالت کلی:

اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A باشد و $a \in A$ ، کلاس هم‌ارزی a را بانماد $[a]$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A \mid xRa\}$$

$$x \in [a] \Leftrightarrow xRa$$

مثلاً در رابطه $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ داریم:

$$[a] = \{x \in Z \mid xRa\} = \{x \in Z \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$ در این صورت:

$$[۱] = \{x \in Z \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

دیدیم که رابطه R روی مجموعه A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی یا تعدی (تراگذری) باشد. به عنوان مثال اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و رابطه R را به صورت:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$$

تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطه R ۳ خاصیت: انعکاسی، تقارنی و تعدی دارد. در حالت کلی به چنین رابطه‌هایی که هر ۳ خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را باهم داشته باشند یک رابطه هم‌ارزی می‌گویند. لازم است، یادآوری کنیم که اگر رابطه R ، ۳ خاصیت فوق را دارا بوده و علاوه بر آن مثلاً خاصیت پادتقارنی نیز داشته باشد بازهم یک رابطه هم‌ارزی نامیده می‌شود.

مثال: رابطه R روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود، ثابت کنید این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است)

$$\forall x, y \in Z, xRy \Leftrightarrow x - y = mk \quad (k \in Z)$$

حل: می‌دانیم صفر مضرب هر عدد است؛ بخصوص $۰ = m \times ۰$ ($k = ۰$) پس:

$$۱) \forall x \in Z, x - x = ۰ = m \times ۰ \Leftrightarrow xRx \quad (\text{خاصیت انعکاسی})$$

$$۲) \forall x, y \in Z, xRy \Rightarrow x - y = mk_1$$

$$-k_1 = k_p \quad \text{طرفین در منفی ضرب}$$

$$\Rightarrow y - x = m(-k_1) \Rightarrow y - x = mk_p \Rightarrow yRx$$

یعنی؛ با فرض این که xRy ثابت کردیم: yRx پس، خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

$$۳) \forall x, y, z \in Z, xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = mk_1 \wedge$$

طرفین دو تساوی را

جمع می‌کنیم

$$y - z = mk_p \Rightarrow x - z = m \underbrace{(k_1 + k_p)}_{k_r}$$

$$[2] \cup [4] \cup [8] = \{2\} \cup \{4, 6\} \cup \{8\} = \{2, 4, 6, 8\} = A$$

در این جا خواصی را که راجع به کلاسهای هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید در حالت کلی و به عنوان یک قضیه مطرح و اثبات می کنیم.

قضیه: اگر رابطه R روی مجموعه ناتهی A یک رابطه هم ارزی باشد، در این صورت:

(الف) کلاسهای هم ارزی رابطه R ، ناتهی اند.

(ب) اگر $b \in [a]$ آنگاه $[a] = [b]$.

(ج) اجتماع همه کلاسهای هم ارزی رابطه R ، مساوی با مجموعه A است.

اثبات:

(الف) فرض کنیم: $[a]$ یک کلاس هم ارزی دلخواه باشد، چون رابطه R هم ارزی است پس خاصیت انعکاسی دارد لذا aRa بنابراین طبق تعریف کلاسهای هم ارزی $a \in [a]$ پس، $[a] \neq \emptyset$.
(ب) برای این که ثابت کنیم $[a] = [b]$ ، (افرض $b \in [a]$ کافی است ثابت کنیم، $[a] \subset [b]$ و $[b] \subset [a]$).

$$\begin{array}{l} \text{ب} \in [a] \quad \text{مندی است } R \\ x \in [a] \Rightarrow xRa \Rightarrow xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb \\ \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \text{ب} \in [a] \quad \text{مندی است } R \\ x \in [b] \Rightarrow xRb \Rightarrow xRb \wedge bRa \Rightarrow xRa \\ \Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \end{array} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow [a] = [b]$$

تذکر: قسمت (ب) نشان می دهد که هر دو کلاس هم ارزی یا مساوی یکدیگرند و یا هیچ اشتراکی ندارند.

(ج) اجتماع همه کلاسهای هم ارزی را با E نشان می دهیم. چون طبق تعریف کلاسهای هم ارزی، هر کلاس هم ارزی زیر مجموعه A است پس اجتماع این کلاسهای هم ارزی یعنی E نیز زیر مجموعه A است بنابراین $E \subseteq A$. حال اگر فرض کنیم $x \in A$ واضح است که $x \in [x]$ پس هر عضو از A در یکی از کلاسهای هم ارزی رابطه R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاسها یعنی E وجود خواهد داشت یعنی $A \subseteq E$ و در کل ثابت شد، $A = E$.

مثال: مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ را در نظر می گیریم و رابطه R را روی A^2 به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\forall (x, y), (z, t) \in A^2, (x, y) R (z, t) \iff y = t$$

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Rightarrow [1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

حال اگر رابطه هم ارزی R روی مجموعه A^2 تعریف شده باشد، $(R \subset A^2 \times A^2)$ در این صورت برای هر $(a, b) \in A^2$ کلاس هم ارزی (a, b) یا $[(a, b)]$ مطابق تعریف اصلی به شکل زیر تعریف می شود:

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) R (a, b)\}$$

مثال: رابطه هم ارزی R روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است
اولاً؛ نوع نمودار کلاسهای هم ارزی را مشخص کنید. ثانیاً؛ $[(1, \sqrt{2})]$ را به صورت مجموعه ای تشکیل دهید.

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c$
حل: بانوشتن یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند: $[(a, b)]$ نمودار هر کلاس هم ارزی مشخص می شود:

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) R (a, b)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + b = y + a\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + (b - a)\} \\ \Rightarrow [(1, \sqrt{2})] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + (\sqrt{2} - 1)\} \end{aligned}$$

و همان طور که مشاهده می شود نمودار دسته های هم ارزی این رابطه خطوطی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می بینیم a و b نقشی در ضریب زاویه این خطوط نداشته و فقط عرض از مبدأ را تعیین می کنند یعنی؛ نمودار همه کلاسهای هم ارزی خطوطی موازی باهم می باشند.

مثال: رابطه R را روی مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8\}$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4)\}$$

واضح است که رابطه R یک رابطه هم ارزی است.

حال کلاسهای هم ارزی این رابطه را تشکیل می دهیم:

$$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{2\}$$

$$[4] = \{x \in A \mid xR4\} = \{4, 6\}$$

$$[6] = \{x \in A \mid xR6\} = \{6, 4\}$$

$$[8] = \{x \in A \mid xR8\} = \{8\}$$

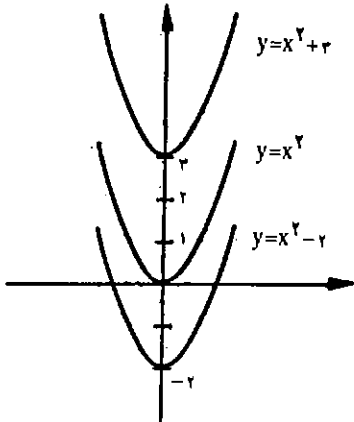
همان طور که مشاهده می کنید: اولاً؛ هیچ کدام از کلاسهای هم ارزی این رابطه هم ارزی تهی نیست. ثانیاً؛ کلاسهای هم ارزی یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند و یا این که مساوی یکدیگرند $([4] = [6])$ و ثالثاً؛ اجتماع کلاسهای هم ارزی رابطه R ، برابر با مجموعه A است یعنی:

رابطه سهمیهایی به شکل $y = x^2 + (b - a^2)$ است مثلاً، نمودار $[(1, 2)]$ سهمی $y = x^2 + 1$ است.

$$[(1, 1)] \rightarrow y = x^2$$

$$[(0, 3)] \rightarrow y = x^2 + 3$$

$$[(-1, -1)] \rightarrow y = x^2 - 2$$



در این جا به تعریف افراز یک مجموعه می پردازیم، هرگاه A یک مجموعه ناتهی بوده و بتوانیم تعدادی متاهی از زیر مجموعه های متمایز A مانند $A_1, A_2, \dots, A_n$ بیاییم به قسمی که اولاً؛ هریک از زیر مجموعه ها ناتهی باشند. ثانیاً؛ هیچ دو تایی از آنها باهم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً؛ اجتماع این زیر مجموعه ها برابر با خود مجموعه A شود، در این صورت می گوییم: مجموعه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعه های افراز کننده مجموعه A بوده و مجموعه $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعه A است.

تبصره: در حالتی که $n = 1$ یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعه A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم می گوییم:

مجموعه $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعه ناتهی A است هرگاه،

$$1) \forall i, A_i \neq \phi \quad 1 \leq i \leq n$$

$$2) \forall i, j, A_i \cap A_j = \phi \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$3) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

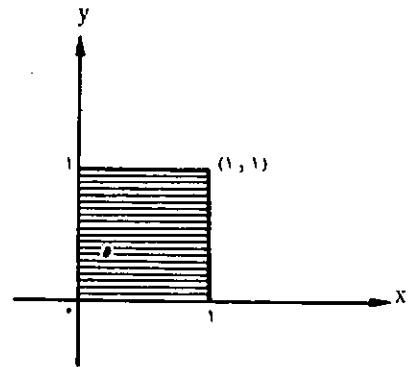
مثال: یک افراز ۴-عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ بنویسید.

(مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ را به شکل $A = [0, 1]$ نیز نشان می دهند.)

اولاً؛ براحتی می توان ثابت کرد که رابطه R یک رابطه هم ارزی است (اثبات به عهده خواننده). ثانیاً؛ همان طور که مشاهده می کنید؛ مجموعه A^2 یعنی $[0, 1] \times [0, 1]$ سطح مربع واحد را نشان می دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزی این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) R (a, b)\} \\ &= \{(x, y) \in A^2 \mid y = b\} \end{aligned}$$

یعنی؛ نمودار هر کلاس هم ارزی پاره خطی است در داخل سطح مربع واحد و موازی با محور x ها که هیچ کدام از این پاره خطها یکدیگر را قطع نمی کنند! زیرا، هریک از این پاره خطها به یک کلاس هم ارزی تعلق دارد و می دانیم (ثابت شده) که کلاسهای هم ارزی عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطه R را روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, (x, y) R (z, t) \iff y - x^2 = t - z^2$$

(الف) ثابت کنید، R رابطه هم ارزی است.

(ب) نمودار هر کلاس هم ارزی در این رابطه چه شکلی را در صفحه مختصات معین می کند؟

اثبات:

اثبات، قسمت (الف) به عهده خواننده.

(ب) برای مشخص کردن نمودار هر کلاس هم ارزی یک کلاس هم ارزی دلخواه مانند: $[(a, b)]$ را در نظر می گیریم:

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) R (a, b)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 = b - a^2\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + (b - a^2)\}$$

همان طور که مشاهده می کنید نمودارهای کلاسهای هم ارزی این

باشد و رابطه R را روی مجموعه A به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\forall x, y \in A, xRy \iff \exists A_i \in E, x, y \in A_i$$

ثابت کنید: رابطه R هم‌ارزی بوده و سپس نشان دهید مجموعه کلاسهای هم‌ارزی رابطه R ، برابر است با E .

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که رابطه R روی A ، هم‌ارزی است.

الف) چون A_i ها مجموعه A را افراز می‌کنند، پس: هر $x \in A$ می‌بایست در یکی و فقط یک A_i باشد، بنابراین: xRx .

ب) باتوجه به تعریف رابطه R داریم:

$$\text{اگر } xRy \Rightarrow \exists A_i \in E, x, y \in A_i \Rightarrow y \in A_i \Rightarrow yRx$$

ج) برای اثبات خاصیت تعدی فرض می‌کنیم: xRy و yRz و ثابت می‌کنیم xRz .

$$xRy \Rightarrow \exists A_i \in E, x, y \in A_i \quad (1)$$

$$yRz \Rightarrow \exists A_j \in E, y, z \in A_j \quad (2)$$

بنابراین y ، هم در A_i و هم در A_j بوده و طبق تعریف افراز چون A_i و A_j جزء مجموعه‌های افراز کننده هستند، نمی‌توانند عضو مشترک داشته باشند مگر آن که $A_i = A_j$ ، در این صورت، باتوجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم، $x, z \in A_i$ و طبق تعریف رابطه R ، xRz .

حال ثابت می‌کنیم مجموعه کلاسهای هم‌ارزی رابطه R یعنی: $F = \{[a] \mid a \in A\}$ همان مجموعه E است و یا به عبارت دیگر هر A_i یکی از کلاسهای هم‌ارزی رابطه R است.

فرض کنیم: $[x]$ یک کلاس هم‌ارزی دلخواه از رابطه R باشد بنابراین:

$$[x] = \{a \in A \mid xRa\} = \{a \in A \mid \exists A_i \in E, x, a \in A_i\} = A_i$$

(چون A_i ها دو به دو عضو مشترکی ندارند لذا $x \in A_i$ نمی‌تواند در هیچ یک از $A_k \neq A_i$ ها باشد) یعنی هر کلاس هم‌ارزی رابطه R یکی از A_i ها است. حال اگر فرض کنیم: $A_i \in E$ ، طبق تعریف افراز باید $A_i \neq \emptyset$ پس:

$$\exists x \in A \text{ و } x \in A_i$$

و چون طبق تعریف رابطه R هر عضو A_i با x رابطه دارد، پس $[x] = A_i$

حل:

۱. اگر فرض کنیم: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$

در این صورت: $E_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲. اگر فرض کنیم: $B_1 = \{1, 4\}$ و $B_2 = \{2\}$ و $B_3 = \{3\}$

در این صورت $E_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳. و بالاخره اگر فرض کنیم: $C_1 = \{1, 2\}$ و $C_2 = \{3, 4\}$

در این صورت $E_3 = \{C_1, C_2\}$ یک افراز ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعه اعداد حقیقی می‌توان به صورت $E = \{IR^+, IR^-, \{0\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعه اعداد صحیح زوج را با Z_E و مجموعه اعداد صحیح فرد را با Z_O نمایش دهیم، در این صورت، $E = \{Z_E, Z_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای Z است.

حال با توجه به قضیه‌ای که راجع به کلاسهای هم‌ارزی یک رابطه هم‌ارزی مانند R اثبات شد و باتوجه به تعریف افراز بدیهی است که: اگر رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه ناتهی A باشد، مجموعه کلاسهای هم‌ارزی رابطه R یک افراز برای مجموعه A است. (طبق قضیه کلاسهای هم‌ارزی هر سه خاصیت افراز را دارند).

مثال: دیدیم که رابطه $xRy \iff x - y = 3k$ یک رابطه هم‌ارزی روی Z بوده و کلاسهای هم‌ارزی این رابطه به قرار زیرند:

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

و واضح است که $[0] \cup [1] \cup [2] = Z$ یعنی:

$$E = \{[0], [1], [2]\} \text{ یک افراز } Z \text{ است.}$$

پس ثابت شد کلاسهای هم‌ارزی هر رابطه هم‌ارزی مانند R روی مجموعه A ، یک افراز برای A است.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A ، رابطه‌ای هم‌ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز همان کلاسهای هم‌ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است که این سؤال و جواب آن را به صورت مسأله‌ای بیان و توضیح می‌دهیم.

مسأله: هرگاه $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز برای مجموعه A

R ، روی A بیاید و نشان دهید که هریک از اعضای E یکی از کلاسهای هم‌ارزی این رابطه است.

$$E_1 = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$$

$$E_2 = \{2, 3\} \times \{2, 3\} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$E_3 = \{4, 5\} \times \{4, 5\} = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

$$R = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \Rightarrow$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4),$$

$$(4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ R رابطه‌ای هم‌ارزی بوده و اگر کلاسهای هم‌ارزی این رابطه را تشکیل دهیم؛ خواهیم داشت:

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2, 3\} = [3]$$

$$[4] = \{4, 5\} = [5]$$



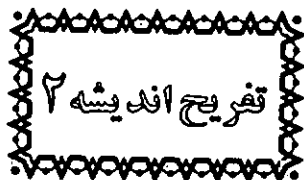
روش عملی یافتن رابطه هم‌ارزی R با در دست داشتن افرازی از A

طبق مسأله قبل دیدیم که اگر $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک افراز برای مجموعه A باشد رابطه R که به صورت $(xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E, x, y \in A_i)$ تعریف می‌شود رابطه‌ای هم‌ارزی روی A بوده و A_i ها همان کلاسهای هم‌ارزی این رابطه خواهند بود، از طرفی می‌دانیم؛ $R \subseteq A \times A$ یعنی، رابطه R مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب که طبق تعریف رابطه R در بالا زوج مرتب (x, y) زمانی در R است که هر دو مؤلفه آن متعلق به یکی از مجموعه‌های افراز کننده باشند، مثلاً: $x, y \in A_k$ پس: طبق تعریف حاصل ضرب، $(x, y) \in A_k \times A_k$ ، پس: رابطه R را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E, (x, y) \in A_i \times A_i$$

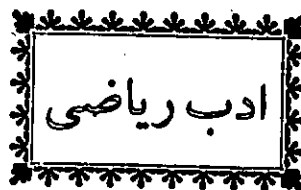
این تعریف ما را به این واقعیت می‌رساند که هرگاه بخواهیم رابطه R را به صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب داشته باشیم؛ کافی است، هریک از مجموعه‌های افراز کننده را در خودش ضرب کنیم و اجتماع مجموعه‌های به دست آمده همان رابطه R خواهد بود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: هرگاه $E = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ یک افراز برای مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد رابطه‌ای هم‌ارزی چون



اگر عمل تعریف شده با $a \cdot b = a^b + b$ را تعریف کند،
۳. (۱.۲) را بیاید.

جواب در صفحه ۳۹



ریاضی‌دان، بعد از این که قضایا اثبات شدند، در جستجوی کاربرد آنها در طبیعت می‌اند، و مسائل را حل می‌کند و جوابهای عددی سوالانی را که در طول تحقیقاتش مطرح شده‌اند، به دست می‌آورد.