

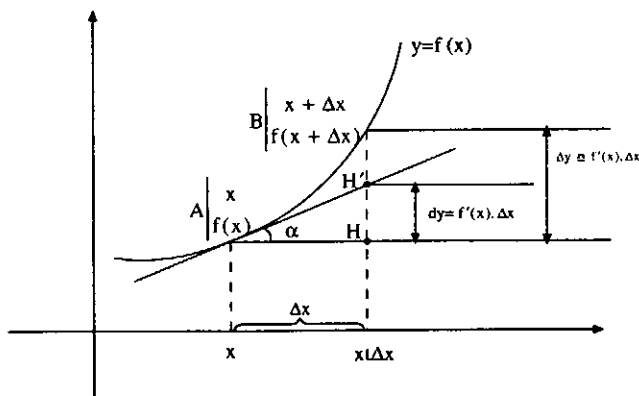
دیفرانسیل - خطی سازی و خطا

• احمد قندهاری

$$\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x \quad , \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

پس :

به شکل زیر توجه کنید.



$$A \text{ نقطه } f'(x) = \tan \alpha = \frac{HH'}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow HH' = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

اگر به شکل دقت کنیم، Δy تغییر عرض تابع f در اثر تغییر x به $x + \Delta x$ است؛ ولی dy تغییر عرض خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول x در اثر تغییر x به $x + \Delta x$ است. عمل جایگزینی

اگر تابع به معادله $y = f(x)$ ، در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و $x \in (a, b)$ ، چنانچه به x نموی (رشدی) مانند Δx نسبت دهیم؛ به طوری که $(x + \Delta x) \in (a, b)$ ، خواهیم داشت:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

بنابه تعریف حد تابع، می توان نوشت: برای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد $\delta > 0$ که:

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \frac{|\Delta y - f'(x) \cdot \Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$$

از عبارت $\frac{|\Delta y - f'(x) \cdot \Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$ نتیجه می شود که

$|\Delta y - f'(x) \Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است. چنانچه Δx به اندازه کافی کوچک باشد $|\Delta y - f'(x) \Delta x| \cong 0$ ، (تقریباً مساوی $\cong$) و $f'(x) \cdot \Delta x$ تقریب مناسبی برای محاسبه Δy است.

پس اگر $|\Delta x|$ به اندازه کافی کوچک باشد، داریم:

$$\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x$$

عبارت $f'(x) \cdot \Delta x$ را دیفرانسیل تابع گوئیم و آن را با نماد dy نشان می دهیم.

به علت وجود خطا در محاسبه طول شعاع، اندازه مساحت دایره با خطا به دست می آید. در این صورت می گوئیم، خطای اندازه گیری در شعاع دایره، به محاسبه مساحت دایره نیز سرایت می کند یا انتشار می یابد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: در دایره ای به شعاع 10^{cm} ، چنانچه محاسبه طول شعاع با خطای $\frac{1}{100}$ سانتیمتر صورت گیرد، مساحت دایره با چه خطایی محاسبه می شود.

حل: $S = \pi R^2 \Rightarrow S'_R = 2\pi R$ مساحت دایره

$$\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta S \cong S'_R \times \Delta R = 2\pi R \times \Delta R$$

$$\Rightarrow \Delta S \cong 2\pi(10)\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\pi}{5}$$

معنای این حل آن است که اگر در محاسبه شعاع دایره به اندازه $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبه مساحت دایره، این خطا انتشار یافته است و مساحت دایره، با خطای تقریباً $\frac{\pi}{5}$ سانتیمترمربع محاسبه شده است. پس خطای اندازه گیری در طول شعاع، به محاسبه مساحت دایره نیز سرایت کرده یا انتشار یافته است. به طور خلاصه، در تابع مشتق پذیر به معادله $y = f(x)$ ، اگر متغیر x به اندازه Δx تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً برابر است با:

$$\Delta y \cong dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

مثال ۲: در تابع به معادله $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ، اگر در نقطه $x = 8$ متغیر x به اندازه $\Delta x = \frac{1}{100}$ تغییر کند، تغییر تابع یعنی Δy تقریباً چه قدر است؟

حل: $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $x = 8$ ، $\Delta x = \frac{1}{100}$

$$\Delta y \cong dy = f'(x) \cdot \Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} \cdot \Delta x = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$$

مثال ۳: در کره ای به شعاع 10^{cm} ، خطای اندازه گیری در حجم کره $(\frac{4}{3}\pi)$ است. خطای اندازه گیری در شعاع کره چه قدر است؟

حل: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = f(R)$ حجم کره

$$V' = f'(R) = 4\pi R^2 \cdot \Delta R$$

$$\Delta V \cong dv = f'(R) \cdot \Delta R = 4\pi R^2 \cdot \Delta R$$

خط مماس به جای f را اصطلاحاً خطی سازی و مقدار BH' را خطای خطی سازی گوئیم و با کوچکتر شدن Δx ، مقدار این خطا کاهش می یابد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در تابع به معادله $y = f(x) = x^2 + x$ ، مطلوب است محاسبه Δy و dy و $\Delta y - dy$ برای

الف: هر x و Δx

ب: $x = 2$ و $\Delta x = 0.1$

ج: $x = 2$ و $\Delta x = 0.01$

د: $x = 2$ و $\Delta x = 0.001$

حل:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - x^2 - x$$

$$\Rightarrow \Delta y = \Delta x(2x + 1 + \Delta x)$$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (2x + 1)\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \Delta x(2x + 1 + \Delta x) - (2x + 1)\Delta x = (\Delta x)^2$$

بقیه محاسبات در جدول زیر نوشته شده است.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
x	Δx	$\Delta x(2x + 1 + \Delta x)$	$(2x + 1)\Delta x$	$(\Delta x)^2$
2	0.1	0.51	0.50	0.01
2	0.01	0.0501	0.05	0.0001
2	0.001	0.005001	0.005	0.000001

به طوری که جدول نشان می دهد، هر چه قدر Δx به صفر نزدیکتر می شود، عبارت $(\Delta y - dy)$ کوچکتر می شود و عبارت $(\Delta y - dy)$ از Δx کوچکتر است، پس $\Delta y \cong dy$ و این تقریب از Δx کمتر است.

انتشار خطا

در برخی از اندازه گیریها، به علت محدودیت وسایل اندازه گیری، معمولاً اندازه مقدار واقعی متغیر، در دست نیست؛ بلکه با خطایی که آن را (متغیر) Δ می نامیم، اندازه گیری اولیه انجام می شود. این عمل، باعث می شود در محاسبات بعدی نیز مقدار واقعی کمیت مورد نظر به دست نیاید. به عنوان مثال، اگر در اندازه گیری طول شعاع یک دایره، به اندازه $\frac{1}{100}$ سانتیمتر خطا کرده باشیم، در محاسبه مساحت دایره، مقدار واقعی مساحت دایره به دست نمی آید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt[5]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

حال اگر $x = 32 = 2^5$ و $\Delta x = 1$ در نظر بگیریم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x + \Delta x} \cong \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{32 + 1} \cong \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{2^{20}}} \cdot \Delta x = 2 + \frac{1}{80} = 2.0125$$

مثال ۷: مقدار تقریبی $\tan 62^\circ$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \tan x$ آن گاه

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

حال اگر: $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ و رادیان $\Delta x = 2^\circ = \frac{2 \times \pi}{180}$ باشد:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x + \Delta x) \cong \tan x + (1 + \tan^2 x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(60^\circ + 2^\circ) \cong \tan \frac{\pi}{3} + (1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}) \times \frac{\pi}{90}$$

$$\Rightarrow \tan 62^\circ \cong \sqrt{3} + (1 + 3) \times \frac{\pi}{90} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{45}$$

مثال ۸: مقدار تقریبی $\text{Arc tan } 1.02$ را محاسبه کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \text{Arc tan } x$ آن گاه

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

اگر: $x = 1$ و $\Delta x = \frac{2}{100}$ آن گاه می‌نویسیم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \text{Arc tan}(x + \Delta x) \cong \text{Arc tan } x + \frac{1}{1+x^2} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \text{Arc tan}(1 + 0.02) \cong \text{Arc tan } 1 + \frac{1}{1+1} \left(\frac{2}{100} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \text{Arc tan } 1.02 \cong \frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$$

مثال ۹: اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به قدر کافی کوچک

$$40\pi = 4\pi(10)^2 \times \Delta R \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{10} \text{ سانتیمتر}$$

مثال ۴: قطر داخلی یک کره فلزی 30 سانتیمتر و قطر خارجی

آن، $30/4$ سانتیمتر است، حجم تقریبی جدار کره چه قدر است؟
حل:

$$\text{حجم کره} = V = \frac{4}{3}\pi R^3 = f(R) \quad \begin{cases} R = 30 \\ \Delta R = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$$V' = f'(R) = 4\pi R^2$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R) \cdot \Delta R = 4\pi R^2 \times \Delta R$$

$$= 4\pi(30)^2 \times \frac{3}{10} = 720\pi \text{ سانتیمتر مکعب}$$

مثال ۵: در یک قطعه فلز، سوراخی به شکل استوانه به شعاع

3 سانتیمتر و عمق 40 سانتیمتر کنده شده است. اگر بخواهیم

به وسیله تراش، قطر سوراخ را به $6/2$ سانتیمتر برسانیم، تقریباً چند سانتیمتر مکعب باید از حجم فلز را بترائیم؟
حل:

$$\text{حجم استوانه} = V = \pi R^2 \cdot h = f(R) \quad \begin{cases} R = 3 \\ \Delta R = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$V' = f'(R) = 2\pi R \cdot h$$

$$\Delta V \cong dV = f'(R) \cdot \Delta R = 2\pi R h \cdot \Delta R$$

$$\Delta V \cong 2\pi(3)(40)\left(\frac{1}{10}\right) = 24\pi \text{ سانتیمتر مکعب}$$

توجه: اگر $y = f(x)$ معادله تابع مشتق پذیر f باشد، داریم:

اگر متغیر x باشد، آن گاه: $y_1 = f(x)$

اگر متغیر $(x + \Delta x)$ باشد، آن گاه: $y_2 = f(x + \Delta x)$

در نتیجه: $(1) \Delta y = y_2 - y_1 = f(x + \Delta x) - f(x)$

از طرفی داشتیم: $(2) \Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot \Delta x$$

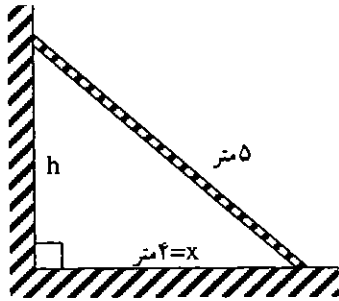
یا

$$\boxed{f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}$$

این رابطه، مقدار تقریبی وضع جدید تابع را پس از این که x

به اندازه Δx تغییر کرده است، نشان می‌دهد.

مثال ۶: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{33}$ را بیابید.



$$\Rightarrow \Delta h \cong \frac{-4}{\sqrt{25-16}} \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \text{ متر}$$

تابع به معادله $y = f(x) = x$ را در نظر می‌گیریم. اگر از دو طرف این تابع، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت (۱) $dy = dx$ ، از طرفی $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ پس $dy = 1 \times \Delta x$ یا $dy = \Delta x$ (۲) با مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\Delta x = dx$ تعریف: اگر تابع f با ضابطه $y = f(x)$ تعریف شود، دیفرانسیل x را که با dx نشان می‌دهیم، به صورت $\Delta x = dx$ تعیین می‌شود.

پس

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

یا

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

به‌طور کلی:

دیفرانسیل متغیر $\times$ (مشتق تابع) = دیفرانسیل هر تابع مشتق‌پذیر

مثلاً اگر تابعهای u و v و t به‌صورت $u = f(x)$ و $v = g(x)$ و $t = h(x)$ باشند داریم:

$$du = u'_x \cdot dx = f'(x) \cdot dx$$

$$dv = v'_x \cdot dx = g'(x) \cdot dx$$

$$dt = t'_x \cdot dx = h'(x) \cdot dx$$

مثال ۱۲: دیفرانسیل تابع به معادله $y = \text{Arc tan } x \sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

حل:

$$dy = y' \cdot dx = \frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2} dx$$

باشد، ثابت کنید $\tan \alpha \cong \alpha$ ، (α در همسایگی صفر است).

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

آن‌گاه $x = 0$ و $\Delta x = \alpha$ داریم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(x + \Delta x) \cong \tan x + (1 + \tan^2 x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \tan(0 + \alpha) \cong \tan 0 + (1 + \tan^2 0) \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \cong \alpha$$

مثال ۱۰: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[5]{0/9} - (0/9)^0$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt[5]{x} - x^0$ آن‌گاه

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - 0x^{-1}$$

اگر $x = 1$ و $\Delta x = -\frac{1}{10}$ ، آن‌گاه داریم:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x + \Delta x} - (x + \Delta x)^0$$

$$\cong \sqrt[5]{x} - x^0 + \left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - 0x^{-1}\right) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{1-0/1} - (1-0/1)^0$$

$$\cong \sqrt[5]{1} - 1 + \left(\frac{1}{5\sqrt[5]{1}} - 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)$$

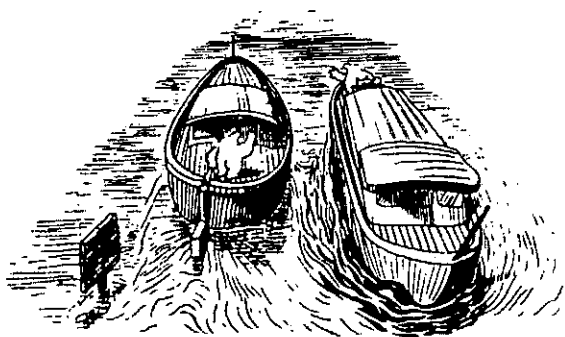
$$\Rightarrow \sqrt[5]{0/9} - (0/9)^0 \cong \frac{12}{25}$$

مثال ۱۱: نردبانی به طول ۵ متر مطابق شکل به دیواری چنان تکیه داده‌ایم که فاصله پای نردبان از پای دیوار، ۴ متر است. به کمک دیفرانسیل، تغییر ارتفاع انتهای نردبان را حساب کنید؛ در صورتی که پای نردبان از دیوار ۵/۰ متر دورتر رود.

حل: در مثلث قائم‌الزاویه شکل، می‌توان نوشت $h^2 = 25 - x^2$

$$h' = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \text{ و } h = \sqrt{25-x^2}$$

$$\Delta h \cong dh = h' \times \Delta x = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \cdot \Delta x \quad \begin{cases} x = 4 \\ \Delta x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



دو کشتی در طول رودخانه‌ای واقع بین دو شهر رفت و آمد می‌کنند. سرعت هر دو کشتی ثابت است؛ یک سرعت هنگام حرکت و یک سرعت هنگام توقف. هر کشتی همزمان و رأس ساعت مشخصی از شهر خود به طرف شهر دیگر حرکت می‌کند. اولین محل تلاقی آنها در ۷ کیلومتری یکی از شهرهاست. هر کشتی پس از رسیدن به مقصد ۴ دقیقه توقف، و مجدداً حرکت می‌کند. بار دوم این دو کشتی در ۹ کیلومتری همان شهر قبلی به هم می‌رسند. فاصله بین این دو شهر چقدر است؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

$$\Rightarrow dy = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)} dx$$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)} dx$$

مثال ۱۳: دیفرانسیل تابع به معادله $y = \ln \sqrt{x} + e^{2x} + a^{\sqrt{x}}$ را بیابید.
حل:

$$dy = y' \cdot dx = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln a (a^{\sqrt{x}}) \right] dx$$

$$dy = \left[\frac{1}{2x} + 2e^{2x} + \frac{\ln a}{2\sqrt{x}} (a^{\sqrt{x}}) \right] dx$$

تمرین

۱- مقدار تقریبی $\sqrt[3]{63}$ و $\text{Arccot } 0.99$ و $\sqrt[n]{a^n + b}$ را بیابید.

۲- اگر α (برحسب رادیان) زاویه‌ای به قدر کافی کوچک باشد، ثابت کنید: $\sin \alpha \approx \alpha$.

۳- دیفرانسیل تابعهای به معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $y = \ln(\text{Arc tan } \sqrt{x})$

۲) $y = a^{\text{Arccos } x} + e^{\text{Arcsin } x}$

۳) $y = \text{Arcsin}(\ln a^x)$

۴) $y = \text{Arc cos}(\ln \sin x)$

