

دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت دوم)

● احمد قندهاری

مورد استفاده دانش آموزان، سال چهارم

نوع هفتم : انتگرال گیری توابع مثلثاتی:

$$I. \int \sin u du = -\cos u + c$$

$$II. \int \cos u du = \sin u + c$$

$$III. \int tg^x u du = tg u - u + c$$

$$IV. \int cotg^x u du = -cotg u - u + c$$

مسأله : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$1) I = \int \frac{\cos(tg x) dx}{\cos^x x}$$

$$u = tg x \Rightarrow du = (1 + tg^x x) dx = \frac{dx}{\cos^x x} \Rightarrow$$

$$I = \int \cos u du = \sin u + c = \sin(tg x) + c$$

$$2) I = \int -\sin x tg^x(\cos x) dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow$$

$$I = \int tg^x u du = tg u - u + c$$

$$= tg(\cos x) - \cos x + c$$

نوع ششم : انتگرال گیری توابع ساده مثلثاتی

$$1) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

مثال: $\int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$

$$2) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

مثال: $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$

$$3) \int tg^x ax dx = \frac{1}{a} tg ax - x + c$$

مثال: $\int tg^x 10x dx = \frac{1}{10} tg 10x - x + c$

$$4) \int cotg^x ax dx = -\frac{1}{a} cotg ax - x + c$$

مثال: $\int cotg^x \frac{x}{5} dx = -5 cotg \frac{x}{5} - x + c$

تمرینها : انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\int \sin \frac{10x}{3} dx$$

$$\int \cos \frac{2x}{\sqrt{3}} dx$$

$$\int tg^x 2\sqrt{3} x dx$$

$$\int cotg^x \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} dx$$

$$I = \int u^r du = \frac{1}{r+1} u^{r+1} + c = \frac{1}{r+1} tg^{r+1} x + c$$

$$I = \int \frac{r \cos^r x dx}{\sin^2 x \sqrt{\sin^2 x}}$$

$$u = \sin^2 x \Rightarrow du = 2 \cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u \sqrt{u}} = \int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \int u^{-\frac{3}{2}} du$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{u}} + c$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\sin^2 x}} + c$$

نوع نهم: انتگرالهایی است مانند نوع چهارم جبری، یعنی مسأله انتگرال شامل سه عامل است به نامهای: اصلی، مشتق و اضافی و مانند همان نوع چهارم جبری حل می شود.

$$I = \int \sin^r x \cos^s x dx \quad \text{مسئله:}$$

$$I = \int \underbrace{\sin^r x}_{\text{اصلی}} \underbrace{\cos^s x}_{\text{اضافی}} \underbrace{\cos x}_{\text{مشتق}} dx$$

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int u^r (1 - u^2) du =$$

$$\int u^r du - \int u^r du = \frac{1}{r+1} u^{r+1} - \frac{1}{r+3} u^{r+3} + c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{r+1} \sin^{r+1} x - \frac{1}{r+3} \sin^{r+3} x + c$$

$$r) I = \int \cot^r(tg x) (1 + tg^2 x) dx$$

$$u = tg x \Rightarrow du = (1 + tg^2 x) dx \Rightarrow$$

$$I = \int \cot^r u du = -\cot^r u - u + c$$

$$= -\cot(tg x) - tg x + c$$

$$y) I = \int x^{n-1} \sin x^n dx$$

$$u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1} dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{n} \int \sin u du = -\frac{1}{n} \cos u + c$$

$$= -\frac{1}{n} \cos x^n + c$$

تمرینها: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{\sin(\cot^2 x)}{\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{\cos(tg^5 x)}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{tg^2(tg^2 x)}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{\cot^2(\cot^2 x)}{\sin^2 x} dx$$

نوع هشتم: انتگرالهایی است مثلثاتی، مانند نوع دوم جبری، یعنی مسأله شامل دو عامل است به نامهای عامل اصلی و عامل مشتق و مانند همان نوع دوم جبری حل می شود.

$$\begin{cases} tg x & \text{عامل اصلی:} \\ \frac{1}{\cos^2 x} & \text{عامل مشتق:} \end{cases}$$

مثال:

$$I = \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x \times \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$u = tg x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$I = \int \sin^r x dx \quad \text{مسأله:}$$

$$I = \int \sin^{r-1} x \cdot \sin x dx = \int (\sin^{r-1} x)^r \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^r \sin x dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow I = \int -(1 - u^2)^r du$$

$$= - \int (1 - u^2 + 2u^2 - 2u^2) du$$

$$= - \int du + \int u^2 du - 2 \int u^2 du +$$

$$2 \int u^2 du = -u + \frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{5} u^5 + u^7 + c$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{2}{5} \cos^5 x + \cos^7 x + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه:

$$\int \cos^r x dx \quad \int \sin^r x dx$$

نوع یازدهم : انتگرال گیری توانهای زوج $\sin x$ و $\cos x$

باید کلیه توانهای زوج را به کمک فرمولهای زیر حذف

کرد.

$$2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \quad 2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$I = \int \sin^2 x dx \quad \text{مسأله:}$$

$$I = \int 2 \sin^2 x dx = 2 \int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= 2 \int (1 - \cos 2x) dx$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \cos^r x \sin^s x dx \quad \int \tan^r x \times \frac{dx}{\cos^s x}$$

$$\int \frac{\cos^r x}{\sin^s x} dx \quad \int \frac{\tan^r x}{\cos^s x} dx$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

نوع دهم : انتگرال گیری توانهای فرد $\sin x$ و $\cos x$

الف) در مورد $\cos^{2n-1} x$: $\cos^{2n-1} x$ را کنار گذاشته،

بقیه را به $\sin x$ تبدیل می کنیم، سپس $\sin x$ را u فرض می کنیم پس از دیفرانسیل گیری در مسأله قرار می دهیم.

ب) در مورد $\sin^{2n-1} x$:

$\sin x$ را کنار گذاشته، بقیه را به $\cos x$ تبدیل می کنیم،

سپس $\cos x$ را u فرض می کنیم، از این فرض دیفرانسیل گرفته در مسأله قرار می دهیم.

$$I = \int \cos^s x dx \quad \text{مسأله:}$$

$$I = \int \cos^{s-1} x \cdot \cos x dx = \int (\cos^{s-1} x)^r \cos x dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^r \cos x dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\Rightarrow I = \int (1 - u^2)^r du = \int (1 + u^2 - 2u^2) du$$

$$= \int du + \int u^2 du - 2 \int u^2 du =$$

$$u + \frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{5} u^5 + c =$$

$$\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \sin x + c$$

تمرینها: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$2 \int \cos 7x \sin 2x dx$$

$$2 \int \cos 5x \cos x dx$$

$$2 \int \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{5x}{2} dx$$

$$2 \int \sin \frac{17x}{4} \cdot \cos \frac{3x}{4} dx$$

نوع سیزدهم: انتگرال گیری توانهای زوج

$\cot x$ و $\tan x$

از توان مسئله دو واحد، دو واحد کم کرده جمله‌هایی به مسئله اضافه و کم می‌کنیم، سپس با فاکتور گیری از راه دسته‌بندی مشتق $\tan x$ را می‌سازیم. سپس $\tan x$ را u فرض می‌کنیم پس از دیفرانسیل گیری در مسئله قرار می‌دهیم.

$$I = \int \tan^4 x dx \quad \text{مسئله:}$$

$$I = \int (\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x + \tan^2 x - \tan^2 x + \tan^2 x - \tan^2 x + 1 - 1) dx$$

$$I = \int [\tan^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) + 1] dx$$

$$I = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx - \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx + \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx + \int (1 + \tan^2 x) dx + \int dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = (1 + \tan^2 x) dx$$

$$I = 2 \int (1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x) dx$$

$$= \int (2 + 2 \cos^2 2x - 2 \cos 2x) dx$$

$$= \int (2 + 1 + \cos 4x - 2 \cos 2x) dx$$

$$= \int (3 + \cos 4x - 2 \cos 2x) dx$$

$$= 3 \int dx + \int \cos 4x dx - 2 \int \cos 2x dx$$

$$= 3x + \frac{1}{4} \sin 4x - 2 \sin 2x + C$$

تمرینها: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$8 \int \cos^4 x dx$$

$$32 \int \sin^6 x dx$$

$$32 \int \cos^6 x dx$$

$$64 \int \cos^4 x dx$$

نوع دوازدهم: اگر مسئله انتگرال شامل حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها باشد، ابتدا آنها را به حاصل جمع تبدیل کرده انتگرال می‌گیریم.

$$I = 2 \int \sin 20x \sin 3x dx \quad \text{مثال:}$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \quad \text{داریم}$$

$$\Rightarrow I = \int [\cos(20-3)x - \cos(20+3)x] dx$$

$$I = \int (\cos 17x - \cos 23x) dx$$

$$= \int \cos 17x dx - \int \cos 23x dx$$

$$= \frac{1}{17} \sin 17x - \frac{1}{23} \sin 23x + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arcsin} u + c$$

مسأله :

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad a > 0$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{a^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}} = \frac{1}{2a} \int \frac{2x dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{a^2} \\ du = \frac{2x dx}{a^2} \\ a du = 2x dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2a} \int \frac{a du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ = \frac{1}{2} \text{Arcsin} u + c$$

$$I = \frac{1}{2} \text{Arcsin} \frac{x^2}{a^2} + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int \frac{(1+tg^2 x) dx}{\sqrt{1-tg^2 x}} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1-\cotg^2 x}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\text{Arctg} x)^2}}$$

نوع پانزدهم : انتگرال Arc tgu .

داریم :

$$I = \int u^6 du - \int u^5 du + \int u^4 du - \int du$$

$$+ \int dx = \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{6} u^6 + \frac{1}{5} u^5 - u + x + c$$

$$= \frac{1}{7} tg^7 x - \frac{1}{6} tg^6 x + \frac{1}{5} tg^5 x + tg x + x + c$$

توجه: فرمول انتگرال گیری توانهای زوج

$$n \in \mathbb{N} \quad \cotg x \text{ و } tg x$$

$$1) : \int tg^{2n} x dx = \frac{1}{2n-1} tg^{2n-1} x - \frac{1}{2n-3} tg^{2n-3} x$$

$$+ \frac{1}{2n-5} tg^{2n-5} x - \dots \pm tg x \mp x + c$$

$$2) : \int \cotg^{2n} x dx = -\frac{1}{2n-1} \cotg^{2n-1} x$$

$$+ \frac{1}{2n-3} \cotg^{2n-3} x - \frac{1}{2n-5} \cotg^{2n-5} x$$

$$+ \dots \pm \cotg x \pm x + c$$

مثال :

$$\int \cotg^6 x dx = -\frac{1}{5} \cotg^5 x + \frac{1}{3} \cotg^3 x - \frac{1}{1} \cotg x$$

$$+ \frac{1}{3} \cotg x - \cotg x - x + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر :

$$\int tg^6 x dx$$

$$\int \cotg^8 x dx$$

$$\int tg^6 \frac{x}{3} dx$$

$$\int \cotg^4 \frac{x}{3} dx$$

نوع چهاردهم : انتگرال Arcsin u .

داریم :

$$u = \frac{x-2}{2} \Rightarrow 2u = x-2 \Rightarrow 2du = dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{2du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Arc } \text{tg} u + c$$

$$= \frac{1}{2} \text{Arc } \text{tg} \frac{x-2}{2} + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 6}$$

نوع هفدهم : محاسبه انتگرالهای

$$\int \frac{dx}{1 \pm \cos x} \quad \int \frac{dx}{1 \pm \sin x}$$

برای حل این انتگرالها، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم، سپس کسر حاصل را تفکیک می کنیم و انتگرال می گیریم.

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin x} \quad \text{مسئله :}$$

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$= \int \frac{(1 + \sin x)dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \text{tg } x + \frac{1}{\cos x} + c = \text{tg } x + \sec x + c$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg} u + c$$

$$I = \int \frac{-2 \sin 2x dx}{1 + \cos^2 2x} \quad \text{مسئله :}$$

$$u = \cos 2x \Rightarrow du = -2 \sin 2x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg} u + c$$

$$= \text{Arctg}(\cos 2x) + c$$

تمرینها : مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{x^2 dx}{2+x^6} \quad \int \frac{dx}{(2+\text{tg}^2 x)\cos^2 x}$$

نوع شانزدهم : محاسبه انتگرال

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

به شرطی که $a > 0$ و $\Delta < 0$.

حل این انتگرال به حل انتگرال $\text{Arctg} u$ تبدیل می شود.

مسئله :

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 16} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{4 \left[1 + \frac{(x-2)^2}{4} \right]} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-2}{2} \right)^2}$$

$$u = \frac{tg x}{\sqrt{r}} \Rightarrow \sqrt{r} u = tg x \Rightarrow$$

$$\sqrt{r} du = (1 + tg^2 x) dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{r} \int \frac{\sqrt{r} du}{1 + u^2} = \frac{\sqrt{r}}{r} \int \frac{du}{1 + u^2}$$

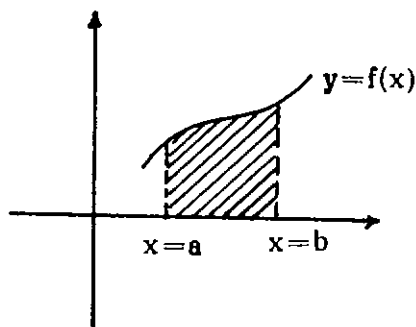
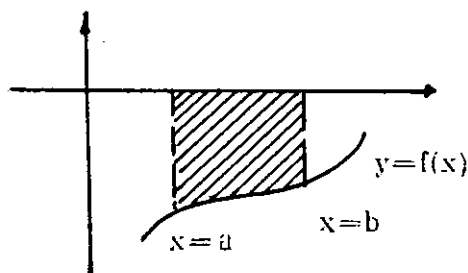
$$= \frac{\sqrt{r}}{r} \text{Arctg} u + c$$

$$= \frac{\sqrt{r}}{r} \text{Arctg} \left(\frac{tg x}{\sqrt{r}} \right) + c$$

تعریف: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

انتگرال معین:



قضیه: اگر تابع به معادله $y = f(x)$ در فاصله (I) پیوسته باشد و در همین فاصله $f(x) \geq 0$ یا $f(x) \leq 0$ در این صورت

توجه:

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow dy = \frac{-du}{u^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + c$$

مثال:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{\cos x} + c$$

تعریفها: مطلوب است محاسبه انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

نوع دهم: محاسبه انتگرالهای

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \quad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

ساده کردن حل مسأله به حل انتگرال $\text{Arctg} u$ تبدیل می شود. $\cos^2 x$ را به $tg^2 x$ و $\sin^2 x$ را به $\cot^2 x$ تبدیل می کنیم پس از

$$I = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} \quad \text{مسأله:}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + tg^2 x}} = \int \frac{dx}{\frac{2 + tg^2 x}{1 + tg^2 x}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{(1 + tg^2 x) dx}{2 + tg^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + tg^2 x) dx}{1 + \frac{tg^2 x}{2}}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a-x) dx$$

زیر است. ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = \frac{\pi}{4}$$

در حالت کلی:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x dx}{\sin^n x + \cos^n x} = \frac{\pi}{4} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x dx}{\sin^n x + \cos^n x} = \frac{\pi}{4} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x} dx}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}} = \frac{\pi}{4} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos x} dx}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}} = \frac{\pi}{4} \quad n \in \mathbb{N}$$

سطح محصور بین منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط به معادله های $x = b$ و $x = a$ ($a < b$ و $a, b \in I$) از رابطه $S = |F(b) - F(a)|$ به دست می آید، که $F(x)$ یکی از توابع اولیه تابع $f(x)$ است.

بنابراین $\int_a^b f(x) \cdot dx$ که يك عدد است را انتگرال معین می نامند و a و b را حدود انتگرال می گویند.

مثال:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx &= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

يك فرمول مفيد:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

اثبات: اگر

$$\int f(x) dx = F(x)$$

آنگاه داریم:

$$\int_0^a f(x) dx = F(a) - F(0)$$

در این صورت:

$$\int_0^a f(a-x) dx = -F(a-x)$$

است و

$$\int_0^a f(a-x) dx = -F(0) + F(a)$$

پس؛ تساوی فوق درست است.

کاربرد فرمول

برای نمونه یکی از آنها را حل می‌کنیم.

مسئله: ثابت کنید:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x dx}{\sin^n x + \cos^n x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x dx}{\cos^n x + \sin^n x}$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} + \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} \right) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x dx}{\sin^n x + \cos^n x} = \frac{\pi}{4}$$

بنابراین فرمول بالا:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x dx}{\sin^n x + \cos^n x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx}{\sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x dx}{\cos^n x + \sin^n x}$$

ادب و ریاضی

کانت می‌گوید که هیچ چیز در حقیقت فضایی نیست و ظاهر فضایی اشیا فقط چیزی است که در مغز ما، نمایان می‌شود. اما علم وظیفه دارد جهان را به صورتی که به ما ظاهر می‌شود و نه به صورتی که در حقیقت دارد (و به عقیده کانت برای ما شناختی نیست) مورد مطالعه قرار دهد. به عقیده کانت این فرضیه روشن می‌سازد که چرا هندسه علم است، یعنی روشن می‌سازد که چگونه ما می‌توانیم از شکل فضایی جهانی که در برابر ما قرار دارد، یک معرفت ترکیبی بسازیم. برخی تضادها که خود وی آنها را آنتی‌نومی (Antinomy) می‌نامد او را ملزم به قبول این نتایج می‌سازند.

فلسفه ریاضی. استیفن بارکو

احمد بیرشک

اینستاین نشان داده است که هندسه اقلیدسی باید کنار گذاشته شود، او براساس نظریه جاذبی خویش، با پرسشهای کیهان‌شناسانه‌ای سروکار دارد و نشان می‌دهد که وجود یک عالم متناهی ممکن است. به علاوه، تمام نتایجی که از اخترشناسی حاصل آمده است، با این اصل که عالم بیضوی است، کاملاً سازگار است. تأسیس ما دایره بر آن که عالم متناهی است به دو جهت است یعنی راجع است به بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ. اما احتمالاً هنوز مسأله عمده این است که ناستاهی جای بر حقی در تفکرات ما اشغال کرده است و نقش بیک مفهوم ضروری را ایفا می‌کند.

دیوید هیلبرت

فلسفه ریاضی. حسین ضیائی و دیگران