

دو خاصیت مهم در انتگرال معین

● سیامک جعفری (دبیر ریاضی) - اهواز

اکنون با هم جمع می‌کنیم:

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a-x) dx$$

اثبات:

$$a-x = u \Rightarrow -dx = du,$$

بنابراین:

$$\int_a^b f(a-x) dx = \int_a^b -f(u) du = \int_b^a f(u) du.$$

* چندین بار هم می‌توان از این خاصیت استفاده کرد.

$$= \int_a^b f(x) dx$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید:

حل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{\cos^2(\pi-x)} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x) \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi \sin x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

اکنون می توان جمع کرد:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos \theta d\theta = \pi [\sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \quad \text{خاصیت دیگر که حالت کلیتر مسأله قبلی است.}$$

انتگرال دوم همان I در صورت مسئله، است که به طرف چپ منتقل می کنیم.

برای محاسبه این انتگرال ساده $\cos x = u$ می گیریم.

$$2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

اثبات:

$$u = a + b - x \Rightarrow \text{حد بالا}$$

$$a + b - x = u \Rightarrow -dx = du$$

$$u = a + b - a = b \quad \text{حد پایین}$$

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = - \int_b^a f(u) du$$

$$= \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx$$

$$2I = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$2I = -\pi \int \frac{du}{u^2} = -\pi \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{\pi}{u}$$

$$2I = \frac{\pi}{\cos x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi \left(\frac{1}{\cos \pi} - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} \right) = \pi(-1-1)$$

$$I = -\pi$$

که مقدار آن به سمت بی نهایت میل می کند.

* اگر حد پایین صفر نباشد می توانیم با روش زیر آنها را تبدیل کنیم:

مثال:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{1+3-x}}{\sqrt{4-(1+3-x)} + \sqrt{1+3-x}} dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx$$

$$2I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx \Rightarrow I = 1$$

به عنوان تمرین انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1) \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 + \sin x}$$

$$2) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx$$

$$x = a\theta + b \Rightarrow \begin{cases} a(\frac{\pi}{2}) + b = \pi \\ a(\pi) + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta + \frac{\pi}{2}) \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \cdot \sin \theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta - \frac{\pi}{2}) \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta - \frac{\pi}{2}) \cos \theta d\theta$$

$$2I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta + \frac{\pi}{2}) \cos \theta - (\theta - \frac{\pi}{2}) \cos \theta d\theta =$$