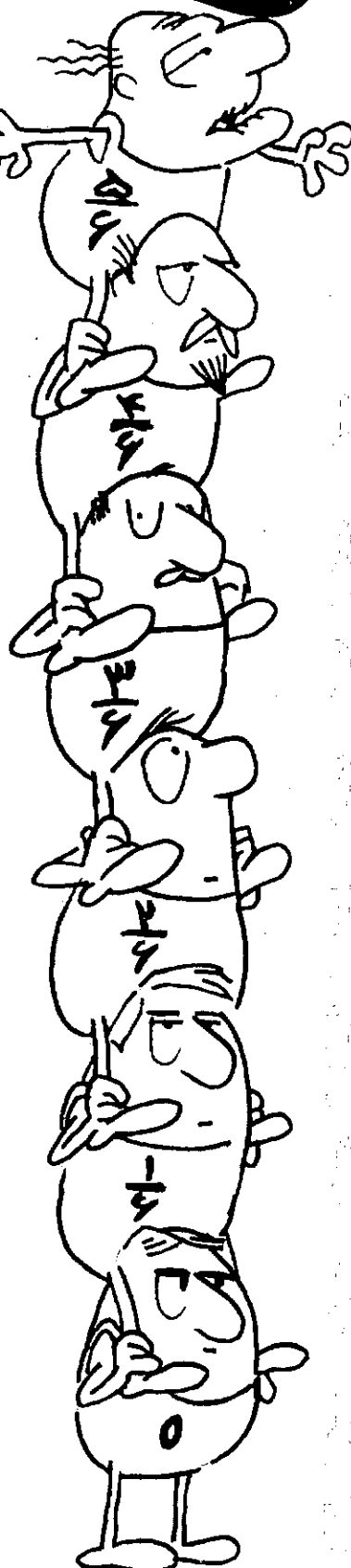


دنباله

احمد قندهاری



یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و به هریک از مقادیر برد آن، یک جمله‌ی دنباله گویند. در واقع، مقادیر برد چنین تابعی، جمله‌های دنباله را تولید می‌کند.

برای مثال، تابع $f(x) = \frac{n}{n+1}$ یک دنباله است. در این دنباله داریم:

$$f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}, \dots, f(n) = \frac{n}{n+1}, \dots$$

پس جمله‌های این دنباله عبارت است از:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

جمله‌ی اول دنباله را با a_1 و جمله‌ی دوم را با a_2 و جمله‌ی سوم را با a_3 و ... و جمله‌ی n ام دنباله‌دار را با a_n نشان می‌دهیم. به جمله‌ی n ام، جمله‌ی عمومی دنباله هم می‌گوییم. و خود دنباله‌ها را با $\{a_n\}$ یا $\{a_n = \frac{n}{n+1}\}$ یا $\{\frac{n}{n+1}\}$ نشان می‌دهیم.

حدّ دنباله و دنباله‌ی همگرا

می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حدّ L است ($L \in \mathbb{R}$) هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد، به طوری که از مرتبه‌ی مانند $n \geq M$ داشته باشیم $|a_n - L| < \epsilon$. این گفته را با نمادهای ریاضی چنین نشان می‌دهیم.

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله همگراست یا دنباله به عدد L همگراست و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ برای یافتن عدد طبیعی M ، باید از نامساوی $|a_n - L| < \epsilon$ شروع کرد تا به نامساوی $n \geq M$ رسید. عمل

معنای نامساوی $n(L+\varepsilon)^2 - 1$ این است که وقتی $n, n \rightarrow \infty$ از عدد حقیقی $(L+\varepsilon)^2 - 1$ کوچک تر است، یعنی اعداد طبیعی از بالا کران دارند که غیر ممکن است. بنابراین، حد دنباله‌ی این مسئله نمی‌تواند عدد حقیقی L باشد، پس دنباله واگراست.

اعمال اصلی روی دنباله‌ها

قضیه: اگر در دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$ ، آن‌گاه داریم:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$$

دنباله‌ی کران‌دار

۱. دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کران‌دار گوئیم هرگاه عدد حقیقی M_r وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$a_n \leq M_r$$

۲. دنباله‌ی $\{a_n\}$ را از پایین کران‌دار گوئیم، هرگاه عدد حقیقی M_l وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$a_n \geq M_l$$

اگر دنباله‌ای هم کران بالا داشته باشد و هم کران پایین، دنباله را کران‌دار گوئیم. برای مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن ۱ و کران پایین آن صفر است. یا مثلاً دنباله‌ی $\{\sin n + \cos n\}$ کران‌دار است، زیرا کران بالای آن $\sqrt{2}$ و کران پایین آن $-\sqrt{2}$ است.

دنباله‌ی صعودی

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_{n+1} \geq a_n$ ، دنباله را صعودی گوئیم. برای مثال دنباله‌ی $\{\sqrt{n+2}\}$ صعودی است.

دنباله‌ی نزولی

اگر در دنباله $\{a_n\}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $a_{n+1} \leq a_n$ ، آن‌گاه دنباله را نزولی گوئیم، مانند دنباله‌ی $\{-n+5\}$.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{n+4}\right\}$ صعودی است.

حل: باید ثابت کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_{n+1} \geq a_n$

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \frac{n+1}{n+5} \geq \frac{n}{n+4}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $(n+4)(n+5)$ ضرب می‌کنیم.

$$(n+4)(n+1) \geq n(n+5) \Rightarrow n^2 + 5n + 4 \geq n^2 + 5n \Rightarrow 4 \geq 0$$

همواره درست است.

رسیدن از $|a_n - L| < \varepsilon$ به $n \geq M$ یک جست‌وجو و بررسی است و پس از یافتن M باید بتوان از $n \geq M$ به نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ رسید. در واقع، روابط حل باید برگشت‌پذیر باشد. مسئله‌ی ۱: با استفاده از تعریف حد دنباله ثابت کنید که حد دنباله‌ی $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$ عدد ۱ است.

یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

حل: برای این کار باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2-n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2} < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$$

چون (ε) عدد مثبتی است پس $\frac{2}{\varepsilon}$ هم مثبت است، ولی ممکن است

$\frac{2}{\varepsilon}$ عدد طبیعی نباشد، در حالی که $\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor$ حتماً عدد طبیعی است، اما

ممکن است از $\frac{2}{\varepsilon}$ کمتر باشد، لذا $M = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ را در نظر می‌گیریم.

حال که عدد طبیعی M را پیدا کردیم باید بتوانیم از $n \geq M$ به نامساوی $\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ برسیم. اگرچه این قسمت از حل ضروری

نیست، ولی برای درک بهتر، آن را می‌نویسیم.

$$n \geq M = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2-n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

این اعمال را برگشت‌پذیری می‌گوئیم. چنان‌چه در یافتن M

درست عمل کنیم نیازی به حل برگشت‌پذیری وجود ندارد.

قضیه: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، حد آن یکتاست.

دنباله‌ی واگرا

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد حقیقی L همگرا نباشد، دنباله را واگرا گوئیم. مثلاً دنباله‌های $\{(-1)^n\}$ و $\{\sqrt{n}\}$ و $\{n^2\}$ و $\{\sin n\}$ واگرا هستند. اگر بخواهیم ثابت کنیم یک دنباله واگراست، کافی است ثابت کنیم حد دنباله نمی‌تواند یک عدد حقیقی مانند L باشد.

مسئله‌ی ۲: ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{n+1}\}$ واگراست.

حل: فرض می‌کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = L$$

باید بگوئیم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |\sqrt{n+1} - L| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{n+1} - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \sqrt{n+1} - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt{n+1} < L + \varepsilon$$

$$\sqrt{n+1} < L + \varepsilon \Rightarrow n+1 < (L + \varepsilon)^2 \Rightarrow n < (L + \varepsilon)^2 - 1$$

قضیه: هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است، ولی عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیه: دنباله‌ی $\{f(n)\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)$ به ازای $x \geq 1$ مشتق‌پذیر باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر $f'(x) \geq 0$ ، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی است.

ب) اگر $f'(x) \leq 0$ ، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نزولی است.

مثال: نشان دهید که دنباله‌ی $\left\{\frac{-n+2}{2n+3}\right\}$ نزولی است.

حل:

$$x = n \geq 1, f(x) = \frac{-n+2}{2n+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7}{(2n+3)^2} < 0$$

در نتیجه دنباله نزولی است.

نکات دنباله

۱- اگر بخواهیم که بدانیم عدد m چندمین جمله‌ی دنباله‌ی

$\{a_n\}$ است، باید معادله‌ی $a_n = m$ را با توجه به این که $n \in \mathbb{N}$ است، حل کنیم.

۲- اگر بخواهیم که بدانیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ چند جمله‌ی منفی یا

چند جمله‌ی مثبت دارد، باید نامعادله‌های $a_n < 0$ یا $a_n > 0$ را حل کنیم. با تعیین علامت، محدوده‌ی جواب با توجه به این که $n \in \mathbb{N}$ است، به دست می‌آید.

مثال: دنباله‌ی $\{n^2 - 6n - 187\}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟

حل:

$$n^2 - 6n - 187 < 0, n^2 - 6n - 187 = 0 \Rightarrow n = 2 \pm \sqrt{9 + 187}$$

$$n = 2 \pm 14 \Rightarrow \begin{cases} n = -11 \\ n = 17 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به تعیین علامت}} -11 < n < 17, n \in \mathbb{N}$$

این دنباله ۱۶ جمله‌ی منفی دارد. $\Rightarrow 1 \leq n \leq 16$

۳- قضیه‌ی فشار: اگر در سه دنباله‌ی $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ برای

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ و $a_n \leq c_n \leq b_n$ باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ آن‌گاه

مسئله‌ی ۳: به کمک قضیه‌ی فشار، حد دنباله‌ای $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ را وقتی $n \rightarrow \infty$ بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}, a_n > 0$$

$$0 < a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \leq 2 \times 1 \times 1 \times \dots \times \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$0 < a_n \leq \frac{2}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ و برای هر عدد صحیح مثبت x تابع f

تعریف شده باشد، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$

۵- به کمک حد بعضی از توابع می‌توان حد بعضی از دنباله‌ها

را پیدا کرد.

مسئله‌ی ۴: حد دنباله‌ی $\left\{\frac{2n^4 + n + 1}{2n^3 + n^4}\right\}$ را وقتی $n \rightarrow \infty$ بیابید.

حل: اگر $x \geq 1$ و $f(x) = \frac{2x^4 + x + 1}{2x^3 + x^4}$ را در نظر بگیریم، وقتی

$x \rightarrow +\infty$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x + 1}{2x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n + 1}{2n^3 + n^4} = 2$$

نکته:

$$n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}; \log n < n < n^p < k^n < n! < n^n, p > 0, k > 1$$

مثال:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

آزمون ۱: دنباله‌ی $\{\sqrt{2n - n^2}\}$ کدام ویژگی را دارد؟

(۱) نزولی و همگراست (۲) صعودی و همگراست

(۳) صعودی و واگراست (۴) نزولی و واگراست

حل: گزینه‌ی ۴.

زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n - n^2} = -\infty, a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 1$$

آزمون ۲: کدام یک از دنباله‌های زیر یکنوا و بی‌کران است؟

$$\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\} \quad (۲) \quad \{\sin n + \cos n\} \quad (۱)$$

$$\left\{\sqrt[3]{n^3 - 27n}\right\} \quad (۴) \quad \left\{\sqrt[n]{n^5 + 5n}\right\} \quad (۳)$$

حل: گزینه‌ی ۳؛ گزینه‌های ۱ و ۲ کران دارند. گزینه‌ی ۱ یکنوا

نیست.

دنباله یکنوا است.

$$x = n \geq 1, f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^4 + 5}{3\sqrt[3]{(x^5 + 5x)^2}} > 0$$

آزمون ۷: در دنباله‌ی a_n داریم $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots}{4 + 3 + 2 + 1 + \dots}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ کدام است؟

حل: گزینه ۲: صورت و مخارج هر دو تصاعد هندسی با قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ هستند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\frac{a_1}{1-r}}{\frac{a_1}{1-r}} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{4}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4}{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

آزمون ۸: دنباله‌ی همگرایی a_n به صورت $a_n = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\dots}}}$ است. این دنباله همگرا به کدام عدد است؟

حل: گزینه ۱: فرض می‌کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، در این صورت می‌توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3+a_n} = 2\sqrt{3+L}$$

$$\Rightarrow L = 2\sqrt{3+L} \Rightarrow L^2 = 4(3+L) \Rightarrow L^2 - 4L - 12 = 0$$

$$(L-6)(L+2) = 0 \Rightarrow L-6=0 \Rightarrow L=6$$

آزمون ۹: چند جمله از دنباله‌ی $\left\{\frac{2n-1}{n}\right\}$ در خارج بازه‌ی $\left(2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10}\right)$ قرار دارد؟

حل: گزینه ۳:

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{2n-1-2n}{n}\right| \geq \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-1}{n}\right| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow n \leq 10$$

آزمون ۱۰: برای دنباله‌ی $\left\{\frac{2n}{n-1}\right\}$ داریم: برای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد $M \in \mathbb{N}$ که: $M \geq n \Rightarrow \left|\frac{2n}{n-1} - 2\right| < \varepsilon$ در این صورت مقدار M کدام است؟

حل: گزینه ۱:

$$\left|\frac{2n}{n-1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-2n+2}{n-1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{n-1}\right| < \varepsilon, n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n-1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n-1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$$

$$\Rightarrow M = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} + 2 \right\rceil$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 5n} = \infty$$

دنباله بی‌کران است.

آزمون ۳: چندمین دنباله‌ی $\{n^2 + n\}$ برابر ۲۲۲ است؟

حل: گزینه ۴:

جمله‌ی نهم (۲) جمله‌ی هشتم (۴) جمله‌ی ششم (۴) جمله‌ی پنجم (۴)

$$n^2 + n = 222 \Rightarrow n^2 + n - 222 = 0 \Rightarrow n^2 - 216 + n - 6 = 0$$

$$(n-6)(n^2 + 6n + 36) + (n-6) = 0 \Rightarrow (n-6)(n^2 + 6n + 37) = 0$$

$$n-6=0 \Rightarrow n=6$$

آزمون ۴: دنباله‌ی $\left\{\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2-1} - 2n + \frac{5}{4}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

حل: گزینه ۱:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2-1} - 2n + \frac{5}{4}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \frac{1}{4} + n - 2n + \frac{5}{4})$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

آزمون ۵: $t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$ و $t_2 = 2$ و $t_1 = 1$ مفروض است. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}}$ کدام است؟

حل: گزینه ۲:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}} = k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{k}, k > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} = \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1} + t_n}{t_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t_n}{t_{n+1}}) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_{n+1}}$$

$$= 1 + k = \frac{1}{k} \Rightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

آزمون ۶: دنباله‌ی $\left\{\cot(n \sin \frac{\pi}{2n})\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

حل: گزینه ۱:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cot(n \sin \frac{\pi}{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(n \times \frac{\pi}{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot \frac{\pi}{2} = 0$$