



دنباله

♦ برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی، رشته ریاضی

تعریف حد دنباله - می‌گوییم حد دنباله $\{a_n\}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، عدد حقیقی L است هرگاه؛

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

در این صورت می‌گوییم دنباله به عدد حقیقی L همگراست و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. برای پیدا کردن عدد طبیعی M ، باید نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ را حل کرد یا به نامساوی $n \geq M$ رسید. پس از یافتن M ، باید بتوانیم از $n \geq M$ نتیجه بگیریم $|a_n - L| < \varepsilon$.

مسئله ۱. با استفاده از تعریف، ثابت کنید حد دنباله

$$\left\{ \frac{2n-4}{n+10} \right\}$$

عدد (۲) است.

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq M \Rightarrow \left| \frac{2n-4}{n+10} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2n-4}{n+10} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2n-4-2n-20}{n+10} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-24}{n+10} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

دنباله، تابعی است که دامنه آن، مجموعه اعداد طبیعی و برد آن، زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد. به هریک از این مقادیر برد آن، یک جمله دنباله گویند.

مثال. تابع $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $a(n) = \frac{n}{n+1}$ یک دنباله است. جمله اول دنباله را با a_1 ، جمله دوم دنباله را با a_2 ، جمله سوم دنباله را با a_3 و... و جمله n ام دنباله را با a_n نشان می‌دهند. خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهند.

در این دنباله داریم: $a_1 = \frac{1}{2}$ ، $a_2 = \frac{2}{3}$ ، $a_3 = \frac{3}{4}$ ، ...

و در دنباله $\left\{ \cos \frac{n\pi}{4} \right\}$ داریم:

$$a_1 = \cos \frac{\pi}{4} = 0, \quad a_2 = \cos \pi = -1, \quad a_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

دنباله همگرا - اگر $\{a_n\}$ یک دنباله باشد، چنانچه

$L \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، در این صورت دنباله را همگرا یا

همگرا به L گویند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پس دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست و دنباله $\{\sin n\}$ نیز واگراست؛ زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = [-1, 1]$$

عددی نامعلوم در بازه

اثبات واگرایی دنباله

اگر دنباله ای واگرا باشد و بخواهیم ثابت کنیم دنباله واگراست، چنین عمل می کنیم. فرض می کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس از مختصری حل به تناقض می رسید.

مسئله ۳. ثابت کنید دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست.

حل: فرض می کنیم دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد؛ پس می توان نوشت:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq M \Rightarrow |(-1)^n - L| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می کنیم $\varepsilon = \frac{1}{4}$

الف. اگر n زوج باشد، پس:

$$|(-1)^n - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow |1 - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow |L - 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4} < L - 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < L < \frac{5}{4} \quad \text{رابطه (۱)}$$

ب. اگر n فرد باشد، پس:

$$|(-1)^n - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow |-1 - L| < \frac{1}{4} \Rightarrow |L + 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4} < L + 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < L < -\frac{3}{4} \quad \text{رابطه (۲)}$$

چون L یک عدد حقیقی است، نمی تواند همزمان در دو رابطه (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین دنباله نمی تواند همگرا باشد؛ پس واگراست.

مثال ۴. ثابت کنید دنباله $\{n^2 - 2\}$ واگراست.

حل: فرض می کنیم این دنباله به عدد حقیقی L همگرا باشد، پس می توان نوشت:

$$\frac{24}{n+10} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+10}{24} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+10 > \frac{24}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{24}{\varepsilon} \Rightarrow n+10 > \frac{24}{\varepsilon} \quad \text{رابطه برگشت پذیری}$$

$$M = \left\lceil \frac{24}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{پس:}$$

اگر $M = \left\lceil \frac{24}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ ، آن گاه از $n \geq M$ با توجه به رابطه

$$\text{برگشت پذیری، به نامساوی } \left| \frac{2n-4}{n+10} - 2 \right| < \varepsilon \text{ خواهیم رسید.}$$

مسئله ۲. ثابت کنید دنباله $\{\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3}\}$ به صفر همگراست.

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq M \Rightarrow |\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3} - 0| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| (\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3}) \times \frac{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n+9 - n-3}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}} < \varepsilon$$

$$\frac{6}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} > \frac{6}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}}$$

داریم:

رابطه برگشت پذیری

$$\frac{6}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n+3}} < \varepsilon$$

$$\frac{6}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2} \quad M = \left\lceil \frac{9}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$$

اگر $n \geq M$ ، با توجه به رابطه برگشت پذیری، به نامساوی

$$|\sqrt{n+9} - \sqrt{n+3}| < \varepsilon \text{ خواهیم رسید.}$$

دنباله واگرا-اگر $\{b_n\}$ یک دنباله باشد، چنانچه $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

مساوی چند عدد یا مقدار نامعلوم و یا ∞ شود. در این صورت می گوئیم دنباله $\{b_n\}$ واگراست.

برای مثال، دنباله $\{(-1)^n\}$ واگراست؛ زیرا:

عدد (۱) کران بالای دنباله است و عدد $\frac{1}{\lambda}$ کران پایین دنباله است و می توان نوشت:

$$1 = \max \left\{ \left| \frac{1}{\lambda} \right|, |1| \right\}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq 1$$

دنباله یکنوا

اگر در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

آن گاه دنباله را صعودی گوئیم، و اگر داشته باشیم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \text{یا} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

آن گاه دنباله را نزولی گوئیم.

دنباله ای را که همواره صعودی یا همواره نزولی باشد، دنباله یک نوا گوئیم.

مسئله ۶: ثابت کنید دنباله $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ نزولی است.

حل: باید ثابت کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_{n+1} \leq a_n$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \frac{2(2^n)}{(n+1)n!} \leq \frac{2^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow n \geq 1$$

همواره برقرار است.

قضیه فشار

اگر در سه دنباله $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ ، از آن ی به بعد داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ، چنانچه $a_n \leq c_n \leq b_n$ ، آن گاه نتیجه می شود: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

مسئله ۷. به کمک قضیه فشار، حد دنباله $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ را بیابید (وقتی $n \rightarrow \infty$).

$$\text{حل: } 0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{(2)(2)(2)(2)\dots(2)}^n}{(1)(2)(3)(4)\dots(n)} \leq \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \dots \times \frac{2}{n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq M \Rightarrow |n^2 - 2 - L| < \varepsilon$$

برای درک بهتر، فرض می کنیم $\varepsilon = 1$

$$|n^2 - 2 - L| < \varepsilon$$

$$|n^2 - 2 - L| < 1 \Rightarrow -1 < n^2 - 2 - L < 1 \Rightarrow 1 + L < n^2 < L + 3$$

$n^2 > 1 + L$ اشکالی ندارد، ولی $n^2 < L + 3$ اشکال

دارد؛ زیرا:

$$n^2 < L + 3 \Rightarrow n < \sqrt{L + 3}$$

چون در محاسبه حد دنباله $n \rightarrow \infty$ ، نامساوی

$$n < \sqrt{L + 3}$$

کراندار است و این غیر ممکن است، بنابراین فرض این که این

دنباله به عدد حقیقی L همگراست، غیر ممکن است؛ پس این

دنباله واگراست.

دنباله کراندار

دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کراندار گوئیم، هرگاه عدد حقیقی

M_1 وجود داشته باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داشته

باشیم $a_n \leq M_1$.

و دنباله $\{a_n\}$ را از پائین کراندار گوئیم، هرگاه عدد حقیقی

M_2 وجود داشته باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داشته

باشیم $a_n \geq M_2$.

یک دنباله را وقتی کراندار گوئیم که هم کران بالا داشته باشد

و هم کران پایین. به طور کلی دنباله $\{a_n\}$ را وقتی کراندار

گوئیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت K وجود داشته باشد؛ به

طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|a_n| \leq k$.

برای مثال، دنباله $\{\sin n\}$ کراندار است؛ زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\sin n| \leq 1$$

مسئله ۵. ثابت کنید دنباله با جمله عمومی

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

حل:

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{n} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

تست ۳. از جمله چندم، جمله های دنباله $\left\{\frac{2n-10}{n+1}\right\}$ در بازه $\left(2-\frac{1}{100}, 2+\frac{1}{100}\right)$ قرار می گیرد،

$$\begin{array}{cc} 1198(2) & 1197(1) \\ 1200(4) & 1199(3) \end{array}$$

حل: گزینه ۴ صحیح است، دنباله به عدد ۲ همگراست.

$$\left|\frac{2n-10}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{2n-10-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-12}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n+1}{12} > 100 \Rightarrow$$

$$n+1 > 1200 \Rightarrow n > 1199 \Rightarrow n \geq 1200$$

۴. برای این که بدانیم چند جمله دنباله $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازه $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار نمی گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| \geq \varepsilon$ را حل کنیم.

تست ۴. چند جمله از دنباله $\left\{\frac{2n-5}{4n}\right\}$ در خارج بازه

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right)$$
 قرار دارد؟

$$\begin{array}{cc} \text{جمله ۱۲۴(۱)} & \text{جمله ۱۲۵(۲)} \\ \text{جمله ۱۲۶(۳)} & \text{جمله ۱۲۷(۴)} \end{array}$$

حل: گزینه ۲ صحیح است، دنباله به عدد $\frac{1}{2}$ همگراست.

$$\left|\frac{2n-5}{4n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n-5-2n}{4n}\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-5}{4n}\right| \geq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4n}{5} \leq 100 \Rightarrow 4n \leq 500 \Rightarrow n \leq 125$$

۱۲۵ جمله از این دنباله، در بازه فوق قرار نمی گیرد.

۵. اگر $a^n + b^n + c^n \sim c^n$ ، $0 < a < b < c$ ، $n \in \mathbb{N}$

تست ۵. دنباله $\left\{\frac{2^n + 3^{n-1} + 4^{n-1}}{2^{n+1} + 3^n + 4^{n-2}}\right\}$ به کدام عدد

همگراست؟

$$\frac{1}{2}(1) \quad \frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{1}{4}(3) \quad \frac{1}{4}(4)$$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$\Rightarrow 0 < \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (0) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

نکات دنباله

۱. اگر بخواهیم بدانیم عدد M چندمین جمله دنباله $\{a_n\}$ است، باید معادله $a_n = M$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in \mathbb{N}$).

تست ۱. عدد ۳۹۹ چندمین جمله دنباله $\{2^n - 2n\}$ است؟

$$\begin{array}{cccc} 24(4) & 23(3) & 22(2) & 21(1) \end{array}$$

حل: گزینه ۱ صحیح است. $2^n - 2n = 399 \Rightarrow$

$$2^n - 2n - 399 = 0 \Rightarrow n = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a}$$

$$n = 1 \pm \sqrt{1 + 399} \Rightarrow n = 1 \pm \sqrt{400} \Rightarrow$$

$$n = 1 \pm 20 \Rightarrow n = 21, -19$$

پس عدد ۳۹۹ جمله بیست و یکم دنباله است.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 21$$

۲. اگر بخواهیم بدانیم دنباله $\{a_n\}$ چند جمله مثبت یا منفی دارد، باید نامعادله $a_n > 0$ یا $a_n < 0$ را حل کنیم (با توجه به این که $n \in \mathbb{N}$).

تست ۲. دنباله $\{2n^2 - 129n + 127\}$ چند جمله منفی

دارد؟

$$\begin{array}{cc} \text{جمله ۶۰(۱)} & \text{جمله ۶۱(۲)} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{جمله ۶۲(۳)} & \text{جمله ۶۳(۴)} \end{array}$$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$2n^2 - 129n + 127 < 0 \quad n = 1, \frac{127}{2}$$

$$a > 0; 1 < n < \frac{127}{2} \text{ یا } 1 < n < 63/5 \Rightarrow n = 2, 3, \dots, 62$$

$$n_{\text{تعداد}} = (63 - 2) + 1 = 62$$

۳. برای این که بدانیم از جمله چندم جمله های دنباله $\{a_n\}$ که به L همگراست، در بازه $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ قرار می گیرد، باید نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ را حل کنیم.

$$\{\sqrt{2}n^0 + \sqrt{3}n^1 + 1\}, n = x \geq 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{2}x^0 + \sqrt{3}x^1 + 1 \Rightarrow f'(x) = 0\sqrt{2}x^0 + 1\sqrt{3}x^0 \geq 0$$

دنباله صعودی است

$$n \in \mathbb{N}, p > 0, k > 1$$

$$n \rightarrow \infty; \log n < n < n^p < k^n < n! < n^n$$

تست ۸. چندتا از دنباله های زیر، همگرا به صفرند.

$$\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\} \quad \left\{ \frac{5^n}{n!} \right\} \quad \left\{ \frac{n^2}{3^n} \right\} \quad \left\{ \frac{2 \log n}{n} \right\}$$

$$3(2) \quad 4(1)$$

$$1(4) \quad 2(3)$$

حل: گزینه ۱ صحیح است. بنا به نکته ۸، حد هر چهار دنباله صفر است.

۹. دنباله همگرا کراندار است (دنبال ممکن است کراندار باشد؛ ولی همگرا نباشد).

تست ۹. چندتا از دنباله ها کراندار هستند؟

$$\left\{ \frac{n! + (n+1)!}{n! + (n+2)} \right\} \quad \left\{ \left(\frac{-1}{n} \right)^n \right\} \quad \left\{ \frac{2n^2 - 5}{n^2 + n} \right\}$$

$$2(2) \quad 1(1)$$

$$4 \text{ هیچکدام} \quad 3(3)$$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$
 پس کراندار است

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \left(\frac{-1}{n} \right)^n \right| \leq 1$$
 کراندار است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! + (n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

همگراست، پس کراندار است

$$\text{تست ۱۰. حد دنباله } \left\{ \frac{\lfloor \sqrt{5}n \rfloor}{n} \right\} \text{ کدام است؟}$$

$$1(2) \quad 2(1)$$

$$0(4) \quad \sqrt{5}(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n-1} + 4^{n-1}}{2^{n+1} + 3^n + 4^{n-2}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{4^{n-2}} = 4$$

۶. اگر دنباله $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$$

تست ۶. در دنباله همگرای مثبت $\{a_n\}$ ، داریم

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \text{ حد دنباله کدام است؟}$$

$$4(2) \quad -4(1)$$

$$-5(4) \quad 5(3)$$

حل: گزینه ۳ صحیح است. فرض می کنیم حد دنباله L باشد، با توجه به نکته ۶ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L}$$

$$L^2 = 2 + L \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 5 \\ L = -4 \end{cases}$$

غیر قابل قبول $L = -4$

۷. اگر در دنباله غیر ثابت $\{f(n)\}$ ، $n = x \geq 1$ و تابع f مشتق پذیر باشد، آن گاه داریم: اگر $f'(x) \geq 0$ ، آن گاه دنباله $\{f(n)\}$ صعودی و اگر $f'(x) \leq 0$ ، آن گاه دنباله $\{f(n)\}$ نزولی است.

تست ۷. چندتا از دنباله های زیر صعودی است؟

$$\{\sqrt{2}n^0 + \sqrt{3}n^1 + 1\} \quad \left\{ \frac{n+2}{2n-1} \right\} \quad \left\{ \frac{2n-3}{n+2} \right\}$$

$$2(2) \quad 1(1)$$

$$0(4) \quad 3(3)$$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\left\{ \frac{2n-3}{n+2} \right\}, n = x \geq 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{v}{(x+2)^2} > 0$$
 دنباله صعودی است

$$\left\{ \frac{n+2}{2n-1} \right\}, n = x \geq 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5}{(2x-1)^2} < 0$$
 دنباله نزولی است

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\delta(\delta^n)n!}{\delta^n(n+1)n!} = \frac{\delta}{n+1}$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = a_4$$

$$n > 4 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{دنباله نزولی است}$$

$$n < 4 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{دنباله صعودی است}$$

پس دو جمله a_4 و a_5 مساوی اند و بزرگ ترین جمله های دنباله می باشند.

تست ۱۳. اگر در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+4}{n}, & \text{زوج } n \\ \frac{n+2}{n}, & \text{فرد } n \end{cases} \quad \text{چند جمله از دنباله در بازه}$$

$$\left(1 - \frac{1}{100}, 1 + \frac{1}{100}\right) \text{ قرار ندارد.}$$

$$\text{جمله } 200 \text{ (۱)} \quad \text{جمله } 250 \text{ (۲)}$$

$$\text{جمله } 300 \text{ (۳)} \quad \text{جمله } 600 \text{ (۴)}$$

حل: گزینه ۴ صحیح است. بنا به نکته (۴)

$$\frac{n+4}{n} - 1 \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{n}{4} \leq 100 \Rightarrow \begin{cases} n \leq 400 \\ n \end{cases} \quad \text{جمله ۲۰۰ زوج}$$

$$\frac{n+2}{n} - 1 \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{n}{2} \leq 100 \Rightarrow \begin{cases} n \leq 200 \\ n \end{cases} \quad \text{جمله ۱۰۰ فرد}$$

پس جمعاً ۳۰۰ جمله.

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt{\delta n} - 1 < \lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor \leq \sqrt{\delta n} \Rightarrow \sqrt{\delta n} - 1 < \lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor \leq \sqrt{\delta n}$$

نامساوی را بر n تقسیم می کنیم.

$$\sqrt{\delta} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor}{n} \leq \sqrt{\delta}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\delta} - \frac{1}{n} \right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\delta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\delta} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor}{n} \leq \sqrt{\delta}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{\delta n} \rfloor}{n} = \sqrt{\delta}$$

تست ۱۱. اگر در دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم $a_1 = 5$ و

$$a_{n+1} = 2n + a_n \quad \text{آن گاه جمله عمومی دنباله کدام است؟}$$

$$2n^2 - 3n + 5 \text{ (۲)} \quad 2n^2 - 2n + 5 \text{ (۱)}$$

$$n^2 - n + 5 \text{ (۴)} \quad 4n^2 - 4n + 5 \text{ (۳)}$$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{داریم: } a_{n+1} = a_n + 2n$$

$$n=1 \begin{cases} a_1 = a_1 + 2(1) \\ a_2 = a_1 + 2(2) \\ a_3 = a_1 + 2(3) \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \end{cases}$$

$$a_n = 2(1+2+3+\dots+(n-1)) + a_1 = 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 5 = n^2 - n + 5$$

تست ۱۲. بزرگ ترین جمله های دنباله $\left\{\frac{\delta^n}{n!}\right\}$ کدام

است؟

$$a_0, a_1 \text{ (۲)} \quad a_1, a_2 \text{ (۱)}$$

$$a_2, a_3 \text{ (۴)} \quad a_3, a_0 \text{ (۳)}$$