

دنباله های عددی

دکتر محمدصادق عسگری

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی - واحد مرکز

تعریف زیر دنباله ی اعداد طبیعی

زیر دنباله هایی از $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هستند.

تعریف زیر دنباله

اگر $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، آن گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله ای جدید به وجود می آید که آن را زیر دنباله ای از دنباله ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می گویند. همچنین، اگر $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیر دنباله ای از اعداد طبیعی باشد، در این صورت دنباله ی $f \circ N$ را یک زیر دنباله از دنباله ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می گویند که جمله ی عمومی آن به صورت زیر به دست می آید:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f \circ N(k) = f(n_k) = f_{n_k}$$

بنابراین $f \circ N = \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیر دنباله از دنباله ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می گویند.

اگر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ی اعداد طبیعی باشد، آن گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله ای جدید حاصل می شود که آن را زیر دنباله ای از اعداد طبیعی می گویند. به عبارت دیگر، دنباله ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیر دنباله از دنباله ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ می گویند، هرگاه به ازای هر k و $t \in \mathbb{N}$ اگر $k < t$ ، آن گاه $n_k < n_t$.

به اجمال می توان گفت، زیر دنباله ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی، دنباله ای از اعداد طبیعی است که جملاتش رفته رفته بزرگ تر و بزرگ تر می شوند. مثلاً هر یک از دنباله های:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, P_n, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 2n, \dots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n-1, \dots$$

تعریف ساده‌تر زیر دنباله

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیر دنباله از اعداد طبیعی باشد، در این صورت، دنباله‌ی $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ را یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n$ مفروض است. می‌دانیم، این دنباله به صورت $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ نیز نمایش داده می‌شود.

اگر زیر دنباله‌ی $n_i = 2i$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه $a_{n_i} = a_{2i} = (-1)^{2i} = 1$ یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $1, 1, 1, \dots$ یا $\{a_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

هم‌چنین، اگر زیر دنباله‌ی $n_i = 2i+1$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه دنباله‌ی $a_{n_i} = a_{2i+1} = (-1)^{2i+1} = -1$ یک زیر دنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $-1, -1, -1, \dots$ یا $\{a_{2i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

نکته: در هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ؛ زیر دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس زوج و زیر دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد می‌گویند.

مثال: در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ زیر دنباله‌های حاصل از جمله‌های با اندیس زوج و اندیس فرد را مشخص کنید.

حل:

زیر دنباله‌ی حاصل از جمله‌های با اندیس زوج، دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ است که a_{2k} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$$

این زیر دنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots$ و یا

$\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

به طور مشابه، زیر دنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد، دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن a_{2k-1} برابر است

$$a_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{-1}{2k-1}$$

این زیر دنباله نیز به صورت $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots, \frac{-1}{2k-1}, \dots$

و یا $\left\{\frac{-1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: هریک از دنباله‌های زیر، یک زیر دنباله از دنباله‌ی

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n}{n+1}$ است.

$$a_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{2k}{2k+1}, \dots$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} : \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, \dots$$

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \dots, \frac{2k}{2k+1}, \dots$$

$$a_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} : \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{2k+1}{2k+2}, \dots$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} : \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, \dots$$

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots, \frac{2k}{2k+1}, \dots$$

دنباله‌های کران دار و بی‌کران

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، در این صورت، مجموعه‌ی $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ را بُرد دنباله می‌گویند. دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از بالا یا پایین یا به طور کلی، کران دار خوانیم، هرگاه مجموعه‌ی بُرد دنباله از بالا یا پایین و یا به طور کلی کران دار باشد.

همچنین دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بی‌کران خوانیم، هرگاه بُرد آن حداقل از یک طرف بی‌کران باشد. کران داری یک دنباله را به صورت‌های زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف دنباله‌ی از بالا کران دار

گوئیم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران دار است، اگر عدد حقیقی M موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \leq M$ ، در این صورت، عدد حقیقی M را یک کران بالای دنباله (کران بالای بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و

از بالا کران دار هستند، زیرا:

$$\{1 - 3^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 - 3^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -26, -8, -2\}$$

$$\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{-n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dots, \frac{-9}{4}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{2}\right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2 > 0 \Rightarrow 2n+2 > 2n \Rightarrow \frac{2n}{n+1} < 2$$

مثال ۲: دنباله‌های $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ و

$\{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا بی کران هستند، زیرا برده هر کدام، از بالا بی کران است:

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^2+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots\right\}$$

$$\{2n+1\}_{n=1}^{\infty} = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$\{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty} = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 7, 15, 31, \dots\}$$

تعریف دنباله‌ی از پایین کران دار

دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی از پایین کران دار خوانیم، اگر عدد حقیقی N موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $N \leq a_n$. در این صورت، عدد حقیقی N را یک کران پایین دنباله (کران پایین برده دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{n^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ و

$$\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
 از پایین کران دار هستند، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}: -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 1 \Rightarrow n^2+1 \geq 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{3}{4} \leq \frac{n+2}{n+3} < 1$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{1 - 3^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و

از پایین بی کران است، زیرا برده این دنباله‌ها از پایین بی کران است:

$$\{-n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -9, -4, -1\}$$

تعریف دنباله‌ی کران دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار است، اگر این دنباله از بالا و پایین کران دار باشد. به عبارت دیگر، دنباله‌ی فوق را کران دار گوییم، اگر عدد حقیقی $M > 0$ موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $-M \leq a_n \leq M$ یا $|a_n| \leq M$.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار هستند، زیرا:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2} < \frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{2}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{2}{3} \leq \frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2}$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n + n\}_{n=1}^{\infty}$ و

$$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$
 بی کران هستند، زیرا برده این دنباله‌ها حداقل از یک طرف بی کران است:

$$\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty} = \{\dots, -3, -1, 2, 4, \dots\}$$

$$\{2^n + n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 6, 11, 20, \dots\}$$

$$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dots, \frac{-25}{6}, \frac{-9}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{16}{5}, \dots\right\}$$

تعاریف کران داری یک دنباله را می‌توان با علائم ریاضی به شکل زیر بیان کرد:

$$a_n \text{ از بالا کران دار است} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq M$$

$$a_n \text{ از بالا بی کران است} \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: a_n > M$$

$$a_n \text{ از پایین کران دار است} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: N \leq a_n$$

$$a_n \text{ از پایین بی کران است} \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: a_n < N$$

$$a_n \text{ کران دار است} \Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq M$$

$$a_n \text{ بی کران است} \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: |a_n| > M$$