

دنباله های عددی

دنباله های عددی و سری های عددی
مسیحی اسحاقزاده ریاضی

• دکتر محمدصادق عسکری

مجموعه ای اعداد طبیعی هستند. بنابراین، برای بررسی کراننداری و بی کرانی این نوع دنباله کافی است، کراننداری تابع $f(x)$ را بررسی کنیم. در صورت کراننداری، تابع $f(x)$ برای هر $x \geq 1$ می توان کراننداری دنباله را نتیجه گرفت.

۳. کراننداری و بی کرانی بعضی از دنباله ها را می توان با استفاده از خواص اعداد طبیعی، خواص نامساوی ها و خواص قدر مطلق بررسی کرد.

مثال: کدام یک از دنباله های زیر، کراندار و کدام بی کران هستند؟

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad ۱.$$

روش اثبات کراننداری و یا بی کرانی یک دنباله

۱. یک روش بررسی کراننداری و بی کرانی یک دنباله، با استفاده از تعریف ها آن است که بُرد دنباله را تشکیل دهیم. در این صورت، کران بالا و پائین بُرد دنباله، همان کران بالا و پائین دنباله است.

۲. می دانیم که بعضی از دنباله ها با جمله ی عمومی $f(n) = a_n$ ، در واقع تحدید تابع حقیقی $f(x)$ ($x \geq 1$) روی

کراندار است.

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 6}{n + 2} \quad 5.$$

قرار می دهیم: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$ ($x \geq 1$) و جدول

تغییرات f را رسم می کنیم:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2} = +\infty$$

x	1					$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$\frac{10}{3}$					$+\infty$

تابع f صعودی است و همواره داریم: $f(x) \geq \frac{10}{3}$.

در نتیجه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ نیز $\frac{n^2 + 3n + 6}{n + 2} \geq \frac{10}{3}$ یعنی دنباله

از بالا بی کران است.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad 6.$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 1 \Rightarrow \text{دنباله کراندار است.}$$

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n} \quad 7.$$

$$\text{برد دنباله} = \{\dots, -\sqrt{7}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, \dots\}$$

دنباله بی کران است.

$$a_n = n^2 + \sin n \quad 8.$$

با روش برهان خلف ثابت می کنیم، دنباله a_n بی کران

است. فرض کنیم دنباله a_n کراندار باشد (فرض خلف).

در نتیجه، عدد حقیقی $M > 0$ وجود دارد، به طوری که برای

$$\text{هر } n \in \mathbb{N}, \quad |n^2 + \sin n| \leq M$$

$$n^2 = |n^2 + \sin n - \sin n| \leq |n^2 + \sin n| + |-\sin n|$$

$$\leq M + |\sin n| \leq M + 1$$

$$\Rightarrow n^2 \leq M + 1 \Rightarrow n \leq \sqrt{M + 1}$$

یعنی مجموعه ای اعداد طبیعی از بالا کراندار است. اما این

اگر برد دنباله را تشکیل دهیم، داریم:

$$\text{برد دنباله} = \left\{ \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \dots, \frac{64}{256}, \frac{49}{128}, \frac{36}{64}, \frac{25}{32}, \frac{16}{16}, \frac{9}{8} \right\}$$

ملاحظه می شود، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{9}{8}$

یعنی دنباله کراندار است.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad 2.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \frac{n}{n+1} < 1$$

یعنی این دنباله کراندار است.

$$a_n = \text{Arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \quad 3.$$

می دانیم، تابع $f(x) = \text{Arctg} x$ صعودی است، در نتیجه

داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \text{Arctg}(0) < \text{Arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \text{Arctg}(1)$$

$$\Rightarrow 0 < \text{Arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

یعنی دنباله کراندار است.

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1} \quad 4.$$

قرار می دهیم: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) و جدول تغییرات

f را رسم می کنیم:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(2x^2 - 1)^2} \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

x	1					$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	-	
$f(x)$	2					$\frac{1}{2}$

تابع f نزولی است و همواره داریم: $\frac{1}{2} < f(x) \leq 2$.

در نتیجه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ نیز $\frac{1}{2} < \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1} \leq 2$ یعنی دنباله

تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل است. در نتیجه دنباله a_n بی کران است.

مثال: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(a_n + 1)}{3}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < a_n < 2$.

به ازای $n=1$ ، داریم: $a_1 = 1$. در نتیجه: $0 < a_1 < 2$.
فرض کنیم، حکم به ازای $n=k$ برقرار باشد؛ یعنی $0 < a_k < 2$. ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

$$\begin{aligned} 0 < a_k < 2 &\Rightarrow 0 < \frac{2}{3}a_k < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{3}a_k + \frac{2}{3} < \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{2(a_k + 1)}{3} < 2 \Rightarrow 0 < a_{k+1} < 2 \end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < a_n < 2$. در نتیجه، دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: ثابت کنید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر، کراندار است.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2}$$

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < a_n < 2$. به ازای $n=1$ داریم: $a_1 = 1$. در نتیجه: $0 < a_1 < 2$. فرض کنیم به ازای $n=k$ ، $0 < a_k < 2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز: $0 < a_{k+1} < 2$.

$$\begin{aligned} 0 < a_k < 2 &\Rightarrow 2 < a_k + 2 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{a_k + 2}{2} < 2 \\ &\Rightarrow 0 < a_{k+1} < 2 \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < a_n < 2$ ؛ یعنی دنباله کراندار است.

مثال: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\sqrt{2} \leq a_n < 2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2} \leq a_1 = \sqrt{2} < 2$. در نتیجه

حکم برقرار است.

فرض کنیم، به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2} \leq a_k < 2$. ثابت می‌کنیم، به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $\sqrt{2} \leq a_{k+1} < 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \leq a_k < 2 &\Rightarrow 2 + \sqrt{2} \leq a_k + 2 < 4 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{2} + \sqrt{a_k + 2} < 4 \\ &\Rightarrow 2 \leq a_k + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{a_k + 2} < \sqrt{4} \\ &\Rightarrow \sqrt{2} \leq a_{k+1} < 2 \end{aligned}$$

یعنی دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی:

$$x_1 = -2, x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n$$

مفروض است. آیا این دنباله کراندار است؟

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $-2 \leq x_n < 0$.

به ازای $n=1$ داریم: $-2 \leq x_1 = -2 < 0$. در نتیجه حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $-2 \leq x_k < 0$. ثابت می‌کنیم به ازای $n=k+1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی $-2 \leq x_{k+1} < 0$.

$$\begin{aligned} -2 \leq x_k < 0 &\Rightarrow \frac{-2k}{k+1} \leq \frac{kx_k}{k+1} < 0 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2k}{k+1} \leq x_{k+1} < 0 \\ &\Rightarrow -2 \leq x_{k+1} < 0 \end{aligned}$$

یعنی دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده

است:

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \quad (n \geq 1)$$

ثابت کنید این دنباله کراندار است.

حل: با استقرا ثابت می‌کنیم، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$.

به ازای $n=1$ داریم: $\sqrt{2} \leq x_1 = \sqrt{2} \leq 2$. در نتیجه



حکم برقرار است.

فرض کنیم به ازای $n = k$ حکم برقرار باشد؛ یعنی $\sqrt{2} \leq x_k \leq 2$. ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + 1$ نیز حکم برقرار است؛ یعنی: $\sqrt{2} \leq x_{k+1} \leq 2$.

$$\sqrt{2} \leq x_k \leq 2 \Rightarrow 2\sqrt{2} \leq 2x_k \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{2} \leq \sqrt{2}x_k \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sqrt{2} \leq x_{k+1} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x_{k+1} \leq 2$$

در نتیجه، دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

مثال: دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده

است:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{4}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

ثابت کنید دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

حل: فرض کنیم جمله‌ی عمومی دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به صورت $x_n = p^n$ باشد. عدد p را در صورت وجود به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= p^{n+1} \\ x_n &= p^n \\ x_{n-1} &= p^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

$$\Rightarrow 2p^{n+1} = p^n + p^{n-1} \Rightarrow 2p^{n+1} = p^{n-1}(p+1)$$

$$\Rightarrow 2p^2 = p+1 \Rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ p = 1 \end{cases}$$

بنابراین، جمله‌ی عمومی دنباله را به صورت ترکیب خطی

از دو عدد $p = 1$ و $p = -\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

$$x_n = A + \frac{(-1)^n B}{2^n} \quad \text{چون } x_1 = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{5}{4}, \text{ بنابراین:}$$

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} \text{ است. به علاوه، برای هر } n \in \mathbb{N} \text{ داریم:}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(-1)^n}{2^n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{(-1)^n}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{5}{4}$$

یعنی دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.



تفویح اندیشه

● حسین نامی ساعی

آب انبار چه قدر آب دارد؟

$\frac{1}{5}$ آب موجود در آب‌انباری را مصرف

می‌کنیم. پس از آن، $\frac{1}{5}$ آب باقی‌مانده را نیز خارج

می‌کنیم. بعد از این برداشت، آب باقی‌مانده در

آب‌انبار به اندازه‌ی $\frac{1}{5}$ گنجایش آن است. حساب

کنید چه کسری از آب‌انبار، آب داشته است؟

حل: فرض می‌کنیم، موجودی آب‌انبار برابر

با x ، و گنجایش آب‌انبار ۱ باشد. چون $\frac{1}{5}$ آب‌انبار

به مصرف رسیده است، پس باقی‌مانده‌ی آب‌انبار

$\frac{4}{5}x$ است. $\frac{1}{5}$ این مقدار نیز برابر است با:

$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}x = \frac{4}{25}x$$

تشکیل داد:

$$\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x = \frac{1}{5}$$

$$25 \times (\frac{4}{5}x - \frac{4}{25}x) = 25 \times \frac{1}{5}$$

$$20x - 4x = 5 \Rightarrow 16x = 5$$

$$x = \frac{5}{16}$$

پس $\frac{5}{16}$ گنجایش آب‌انبار پر بوده است.