

«دلیل محسوس» در کنار «برهان»

دکتر احمد شرف الدین

مقدمه:

در سطور زیر دو حکم ریاضی ذکر کرده‌ام و برای هر یک از آنها برهانهایی را که در کتابهای ریاضی ذکر شده‌است آورده‌ام. سپس برای نشان دادن درستی این دو حکم دو شیوه کاملاً محسوس و ملموس عرضه کرده‌ام و این دو شیوه را تحت عنوان «دلیل محسوس» ذکر کرده‌ام. این گونه دلایل با وجود آن که به نظر می‌آید «برهان» می‌باشند برهان نیستند اما علاوه بر آن که در تشریح و تفهیم مطلب نقش مهمی دارند دارای جاذبه خاصی می‌باشند و شایسته است در کنار برهان ذکر شوند. از این جهت است که عنوان مقاله را «دلیل محسوس» در کنار «برهان» گذاشته‌ام. مطالعه این مقاله نه تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران نیز مفید است.

حکم ۱

n کسر $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ را که صورتها و مخرجهای آنها اعداد مثبتند در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که نامساویهای زیر برقرار باشند:

$$(۱) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{b_n}$$

ثابت کنید نامساویهای زیر برقرار است:

$$(۲) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

برهان:

قرار می‌دهیم:

$$(۳) \quad \frac{a_1}{b_1} = q_1, \quad \frac{a_2}{b_2} = q_2, \dots, \quad \frac{a_n}{b_n} = q_n$$

از نامساویهای (۱) و (۳) رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad q_1 < q_2 < \dots < q_n$$

همچنین از رابطه‌های (۳)، رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$(۵) \quad a_1 = b_1 q_1, \quad a_2 = b_2 q_2, \dots, \quad a_n = b_n q_n$$

از رابطه‌های (۴) و (۵) حاصل می‌شود:

$$(۶) \quad a_1 = b_1 q_1, \quad a_2 > b_2 q_1, \quad a_3 > b_3 q_1, \dots, \quad a_n > b_n q_1$$

از رابطه‌های (۶) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(۷) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n > (b_1 + b_2 + \dots + b_n) q_1$$

از رابطه (۷) با توجه به این که $q_1 > 0$ است رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(۸) \quad q_1 < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

از رابطه (۸) با توجه به آن که $\frac{a_1}{b_1} = q_1$ (رابطه اول از رابطه‌های (۳))

نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$(۹) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که

$$(۱۰) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

دو نامساوی (۹) و (۱۰) همان نامساویهایی هستند که می‌خواستیم ثابت کنیم (یعنی دو نامساوی مذکور در (۲)). در سطور زیر برای نشان دادن درستی نامساویهای (۲) یک دلیل ملموس عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

اکنون برای نشان دادن درستی رابطه (۲)، شیوه‌ای کاملاً ملموس و محسوس به کار می‌بریم. بدین قرار: n ظرف $c_1, c_2, \dots, c_n$ و در نظر می‌گیریم و در آنها به ترتیب به اندازه‌های $b_1, b_2, \dots, b_n$ آب و به اندازه‌های $a_1, a_2, \dots, a_n$ شکر می‌ریزیم. هریک از مخلوطها را به هم می‌زنیم تا شکرها در آب حل شوند و n شربت در ظرفهای $c_1, c_2, \dots, c_n$ حاصل شود.

می‌دانیم که در یک شربت هر قدر نسبت مقدار شکر به مقدار آب بیشتر باشد آن شربت شیرینتر است. چون بنا به فرض: $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ است (رجوع کنید به رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_1 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_2 است. همچنین چون $\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$ است (رجوع کنید به همان رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_2 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_3 است و به همین ترتیب. اکنون تمام شربت‌ها را در یک ظرف بزرگ که آن را c می‌نامیم می‌ریزیم و مخلوط را به هم می‌زنیم تا یک شربت همگن حاصل شود. مقدار آب و شکر در شربت ظرف c به ترتیب به اندازه‌های $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ و $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ است. پس اندازه شیرینی ظرف c با مقدار کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

مشخص می‌شود.

اما شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_1 بیشتر است پس چنین داریم:

$$(۱۱) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

همچنین شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_n کمتر است پس:

$$(۱۲) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

بدین سان نایل آمدیم تا درستی نامساویهای (۱۱) و (۱۲) را با دلیل ساده‌ای که کاملاً محسوس و ملموس است نشان دهیم.

تبصره. به طور کلی اگر اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ (یعنی مخرجهای کسرها) مثبت باشند و اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ (یعنی صورت‌های

کسرها) اعداد جبری باشند باز هم نامساویهای (۱) برقرار است.

حکم ۲

ثابت کنید تابع بولتی سه متغیری

$$(۱۳) \quad f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z$$

دارای خاصیت «اکثریت» است یعنی این که اگر مقدار دو متغیر از سه متغیر و یا هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a خواهد بود.

برهان

چون تابع (۱۳) نسبت به سه متغیر متقارن است پس کافی است ثابت کنیم که:

(الف) اگر مقدار دو متغیر x و y برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۴) \quad f(a, a, z) = a$$

(ب) اگر مقدار هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۵) \quad f(a, a, a) = a$$

اثبات قسمت الف. چنین می‌نویسیم:

$$(۱۶) \quad f(a, a, z) = a \cdot a \cdot z' + a \cdot z \cdot a' + z \cdot a \cdot a' + a \cdot a \cdot a$$

با رعایت آن که $a \cdot a = a$ و $a \cdot a' = 0$ از رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$(۱۷) \quad f(a, a, z) = a \cdot z + 0 + 0 + a$$

اگر $z = 1$ باشد از رابطه (۱۷) نتیجه می‌شود:

$$f(a, a, z) = a \cdot 1 + a = a + a = a$$

و اگر $z = 0$ باشد از رابطه (۱۷) حاصل می‌شود:

$$f(a, a, z) = a \cdot 0 + a = 0 + a = a$$

اثبات قسمت ب. چنین می‌نویسیم:

$$f(a, a, a) = a \cdot a \cdot a' + a \cdot a \cdot a' + a \cdot a \cdot a' + a \cdot a \cdot a \\ = 0 + 0 + 0 + a = a$$

بدین سان آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم ثابت شد. اکنون یک دلیل ساده کاملاً ملموس برای حکم مورد نظر عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

سه تن به نامهای X ، Y ، و Z باید در یک جلسه مشورتی که از این سه تن تشکیل می شود شرکت کنند. می خواهیم حضور اکثریت آنها را در جلسه با یک تابع بولی بنویسیم. حضور افراد X ، Y ، و Z را در جلسه مشورتی به ترتیب با X ، Y ، و Z و عدم حضور آنها را با X' ، Y' ، و Z' نشان می دهیم.

اکثریت این افراد هنگامی در جلسه حضور دارند که دو تن یا هر سه تن در جلسه حضور یابند. اکثریت هنگامی حاصل می شود که یکی از چهار حالت زیر پیش آید.

الف. X و Y در جلسه حضور داشته باشند ولی Z غایب باشد. این امر را عبارت بولی زیر نشان می دهیم:

$$x y z'$$

یعنی X حاضر است و Y حاضر است و Z غایب است.

ب. Y و Z در جلسه حضور داشته باشند ولی X غایب باشد. این امر را با عبارت بولی زیر نشان می دهیم:

$$y z x'$$

پ. X و Z در جلسه حضور داشته باشند ولی Y غایب باشد. این امر با عبارت زیر نشان داده می شود:

$$x y' z$$

ت. X ، Y ، و Z هر سه در جلسه حضور داشته باشند. این امر با عبارت زیر بیان می شود:

$$x y z$$

اما برای حضور اکثریت در جلسه باید حالت الف یا حالت ب یا حالت پ یا حالت ت اتفاق بیفتد. پس حضور اکثریت با تابع زیر بیان می شود:

$$f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z$$

تبصره. تابع (۱۳) یعنی تابع اکثریت را می توان به صورت زیر به طور خلاصه نوشت:

$$f(x, y, z) = x y + y z + z x$$

برهان. بنابر خاصیت همخوانی می توان نوشت:

$$(14) \quad x y z = x y z + x y z + x y z$$

با رعایت رابطه (۱۸) چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x y z' + y z x' + z x y' + x y z + x y z + x y z \\ &= x y (z' + z) + y z (x' + x) + z x (y' + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x y \times 1 + y z \times 1 + z x \times 1 \\ &= x y + y z + z x \end{aligned}$$

حکم ۳. مثالی که در زیر می آوریم یکی از قضیه های مهم آنالیز

ریاضی مربوط به بسط فوریه است. اثبات قضیه در ریاضیات عالی توضیح داده می شود و با یک «دلیل محسوس»، صحت قضیه نشان داده می شود. این مطلب طوری شرح داده شده است که مطالعه آن برای دانش آموزان کاملاً قابل فهم و مفید خواهد بود.

بسط فوریه. اگر تابع f متناوب باشد و دوره تناوب آن 2π

باشد می توان تابع را در x به صورت بسط زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \quad (1)$$

$$a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \dots$$

در بسط بالا: $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ اعداد

جبری ثابتند. این اعداد را می توان به کمک دستورهای زیر به دست آورد.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \, dt \end{cases}$$

مثال: بسط فوریه تابع $f(x) = |\sin \omega t|$ چنین است:

$$\begin{aligned} |\sin \omega t| &= \frac{2}{\pi} \\ &\left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t + \dots\right) \end{aligned}$$

در زیر صورت یکی از قضیه های بسط فوریه را ذکر می کنیم.

قضیه. مجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

هنگامی که n به سوی بی نهایت میل می کند دارای حد متناهی است.

اثبات قضیه. اثبات قضیه در کتابهای آنالیز ریاضی عالی

به طور مشروح آمده است.

«دلیل محسوس» برای تأیید درستی قضیه: ابتدا

چند مطلب ساده فیزیکی ذکر می کنیم و سپس این مطالب را به کار می گیریم.

الف - اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از سیمی با

مقاومت R اهم بگذرد، مقدار انرژی که در واحد زمان در سیم مصرف می شود، چنین است:

$$\text{وات } RI^2$$

ح - اگر جریان الکتریکی متغیر $a_k \cos kx$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله زمانی $[-\pi, +\pi]$ چنین است:

$$A_k = R a_k^2 \pi$$

و همچنین

پس مجموع انرژیهای مصرف شده به وسیله جریانهای مذکور از

سیمهایی با مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi, +\pi]$ چنین است:

$$\frac{1}{\pi} R a_1^2 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} R (a_k^2 + b_k^2) \pi \quad (2)$$

$k \rightarrow \infty$

اکنون یک جریان الکتریکی $i = f(x)$ را در نظر می گیریم $f(x)$

همان تابعی است که بسط فوریه آن مورد مطالعه است و در دستور (۱)

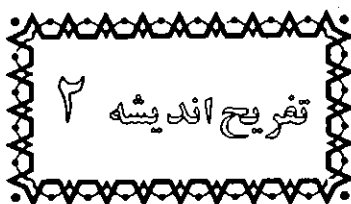
ذکر کردیم. انرژی مصرف شده از عبور جریان $i = f(x)$ از سیمی با

مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi, +\pi]$ مقداری است محدود؛ زیرا تابع

$f(x)$ پیوسته است. مقدار این انرژی مساوی است با مقدار انرژی که

در عبارت (۲) ذکر شد پس $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$ دارای

حد منتهای است.



به ترتیب نشان داده شده، ده جعبه روی یک استوانه شیبدار

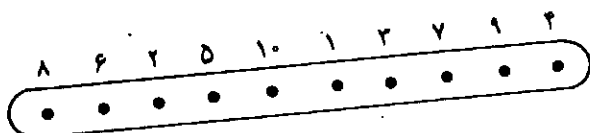
متحرک چیده شده است. برای مرتب کردن این جعبه ها به ترتیب اعداد

و از چپ به راست از یک بازوی مکانیکی استفاده می شود که برای این

منظور می تواند هر بار، حداکثر سه جعبه را که کنار هم قرار دارند به

منتهی الیه ریل منتقل کرده، آنها را در جای خود بیندازد. آیا می توانید

در پنج حرکت جعبه ها را مرتب کنید؟



جواب در صفحه ۸۸

ب - اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از مقاومت R

اهم در مدت T ثانیه بگذرد مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت،

چنین است:

$$R I^2 T$$

پ - اگر یک جریان الکتریکی متغیر $i = I \sin \omega t$ از مقاومت R

بگذرد، مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت از لحظه t_1 تا لحظه t_2 ،

چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} R I^2 \sin^2 \omega t \, dt$$

بخصوص انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ (یا از

لحظه $t=0$ تا لحظه $t=2\pi$) چنین است:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} R I^2 \sin^2 \omega t \, dt = R I^2 \pi$$

زیرا می دانیم که

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \omega t \, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt = \pi$$

ت - اگر یک جریان الکتریکی متغیر $i = I \cos \omega t$ از مقاومت R

بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است:

$$R I^2 \pi$$

اکنون با استفاده از مطالبی که هم اکنون درالف، ب، پ، و ت ذکر

کردیم، یک دلیل محسوس برای درستی قضیه مورد نظر ارائه می دهیم:

جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{\pi} a_1$ و جریانهای الکتریکی متغیر:

$a_1 \cos x, b_1 \sin x, a_2 \cos x, b_2 \sin x, \dots$ را در نظر می گیریم

(این عبارتهای ریاضی با ضرایب بسط فوریه اند که در دستور (۱) ذکر

کردیم). در این عبارتها x را متغیر زمان تلقی می کنیم.

ث - اگر جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{\pi} a_1$ از سیمی با مقاومت R

بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است

(بنابر مطلب مذکور در الف)

$$A_1 = R \left(\frac{1}{\pi} a_1 \right)^2 \times 2\pi = \frac{1}{\pi} R a_1^2 \pi$$

ج - اگر جریان الکتریکی متغیر $a_1 \cos x$ از سیمی با مقاومت R

بگذرد، انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است

(بنابر مطلب مذکور در ت):

$$A_1 = R a_1^2 \pi$$

ج - اگر جریان الکتریکی متغیر $b_1 \sin x$ از سیمی با مقاومت R

بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله $[-\pi, +\pi]$ ، چنین است:

$$B_1 = R b_1^2 \pi$$