

درخت تو گر بار دانش بگیرد
به زیر آوری چرخ نیلوفری را

درخت چیست؟

برای دانش آموزان دوره‌ی پیش دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

اصطلاحات و قرار دادهای مقدماتی

در هر گراف، تعداد رأس‌ها را مرتبه‌ی گراف و تعداد یال‌ها را اندازه‌ی گراف می‌نامند و به ترتیب با p و q نمایش می‌دهند. هم‌چنین، تعداد یال‌هایی که از رأس a عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده و با $(deg a)$ نشان داده می‌شود. اگر درجه‌ی یک رأس عددی زوج باشد، آن رأس را رأس زوج و اگر فرد باشد، آن را رأس فرد می‌نامیم. چنان‌چه از یک رأس یالی عبور نکنند، آن رأس را ایزوله می‌نامند. بزرگ‌ترین درجه‌ی یک رأس در یک گراف، ماکزیمم درجه‌ی گراف، و کوچک‌ترین درجه، می‌نیمم درجه‌ی گراف نامیده می‌شود. این دو عدد را به ترتیب با Δ و δ نشان می‌دهند.

در مثال قبل، گرافی رسم شده از مرتبه‌ی ۶ و با اندازه‌ی ۴ (۶ رأس و ۴ یال) که رأس V_6 ایزوله است و داریم:

$$deg V_6 = 0, deg V_1 = 2, deg V_2 = 2, deg V_3 = 2$$

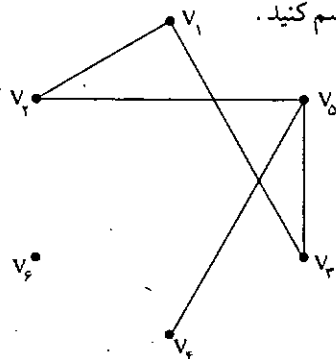
$$deg V_4 = 1, deg V_5 = 3$$

رأس‌های V_6 و V_1 و V_2 و V_3 همگی زوج، و رأس‌های V_4 و V_5 فرد هستند. در این گراف، همواره $\Delta = 3$ و $\delta = 0$ (ماکزیمم و می‌نیمم درجه).

حال که یادآوری اجمالی روی مقدمات و تعاریف در

هر مجموعه‌ی n عضوی مانند V ، و هر مجموعه شامل تعدادی یا هیچ یا همه‌ی زیر مجموعه‌های دو عضوی از V مانند E ، گرافی چون $G = (V, E)$ را تعریف می‌کنند که این نمودار یا گراف، شامل تعدادی نقطه یا رأس، به تعداد اعضای V و تعدادی خط (یال) بین رئوس، به تعداد اعضای E می‌باشد؛ به طوری که بین دو رأس V_i و V_j یال رسم می‌شود، هرگاه $\{V_i, V_j\} \in E$ ، که در این حالت دو رأس مذکور را رأس‌های مجاور می‌نامند (می‌توان برای راحتی به جای $\{V_i, V_j\}$ نوشت: $V_i V_j$).

مثال: اگر $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ و $E = \{V_1 V_2, V_1 V_3, V_2 V_5, V_3 V_5, V_4 V_5\}$ در این صورت گراف $G = (V, E)$ را رسم کنید.



گراف‌های ساده انجام شد، آماده‌ایم تا به سراغ دسته‌ی خاصی از گراف‌ها به نام «درخت» برویم. ولی قبل از آن توصیه می‌کنم، مفاهیمی چون مسیر، دور، هم‌بندی گراف‌ها، گراف کامل، گراف‌های 2 -منتظم و گراف تهی را یک بار مطالعه کنید، تا آماده باشیم برای کشیدن درخت!

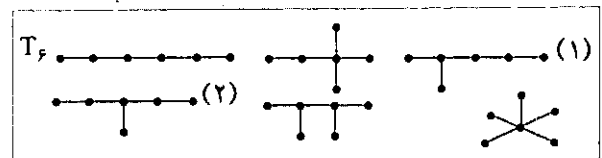
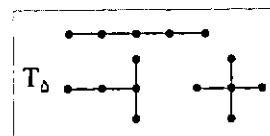
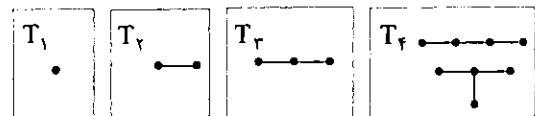
تعریف درخت

هر گراف هم‌بند که دور نداشته باشد، «درخت» نامیده می‌شود. پس در واقع درخت‌ها دسته‌ی خاصی از گراف‌های هم‌بند هستند که ویژگی‌های خاص خودشان را دارند. مهم‌ترین ویژگی آن‌ها، فاقد دور بودن است. از تعریف درخت چنین برمی‌آید که اگر گرافی هم‌بند نباشد یا دور داشته باشد، درخت نیست.

گراف‌های زیر درخت نیستند:



درخت از مرتبه‌ی P را با نماد T_P نشان می‌دهیم که درخت‌های T_1 و T_2 و T_3 درخت‌هایی منحصر به فرد هستند و از T_3 به بالا، یعنی T_4 و T_5 و...، منحصر به فرد نیستند. به درخت‌های زیر توجه کنید:



توجه دارید که در T_6 ، درخت‌های شماره‌ی (۱) و (۲) با هم فرق اساسی دارند. اگرچه تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳، ۲ و ۱ در آن‌ها برابر است، ولی رأس درجه‌ی ۳، در (۱) با دو رأس درجه‌ی ۱ و یک رأس درجه‌ی ۲ مجاور است و در (۲) با دو رأس درجه‌ی ۲ و یک رأس درجه‌ی ۱ مجاورت دارد.

اگر اطلاعاتی راجع به هیدروکربن‌ها در شیمی آلی داشته باشید، شباهت‌های بسیاری را بین ساختمان مولکولی آن‌ها و

درخت‌ها مشاهده می‌کنید. در واقع، اگر هر هیدروژن و کربن را در حکم یک رأس و پیوند مولکولی بین آن‌ها را یال تصور کنیم، هر هیدروکربن یک درخت است که در این صورت، از تمام قضایا و نکته‌هایی که در گراف‌ها بیان و اثبات می‌شود، می‌توان در این بخش از علم شیمی استفاده کرد.

نکته‌ی بسیار مهمی که از تعریف درخت می‌توان دریافت این است که چون درخت، گرافی هم‌بند است که دور ندارد، پس می‌توان گفت در بین گراف‌های هم‌بند از مرتبه‌ی P ، درخت T_P کمترین تعداد یال را دارد و البته K_P (گراف کامل) دارای بیشترین یال ممکن است. در واقع، اگر حتی یک یال به یک درخت اضافه شود (بدون اضافه کردن رأس)، در آن دور ایجاد می‌شود و دیگر درخت نیست. و نیز اگر یک یال از هر جای آن حذف کنیم، گرافی ناهم‌بند پدید می‌آید که باز هم درخت نیست. همین خاصیت درخت‌ها ما را به یک شرط لازم برای هم‌بندی می‌رساند. بدین صورت که: «در هر گراف از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q ، اگر $q < p - 1$ آن‌گاه این گراف همواره ناهم‌بند است.»

به بیان دیگر، اگر گراف G هم‌بند باشد، در این صورت حداقل مقدار برای تعداد یال‌های آن $q = p - 1$ است. (رابطه‌ی $p = q + 1$ یا $q = p - 1$ بین مرتبه و اندازه، در تمام درخت‌ها برقرار است که به صورت قضیه‌ای در درخت‌ها بیان و اثبات می‌شود). بین درخت‌های از مرتبه‌ی $p \geq 3$ ، همواره برای هر $p \geq 3$ یک درخت وجود دارد که به صورت یک خط مستقیم است یا می‌توان آن را به یک خط مستقیم تبدیل کرد. برای مثال، برای $p = 5$ و $p = 4$ در شکل‌های قبل ملاحظه کردید که درخت‌های زیر:



ویژگی خط مستقیم را دارند که ما از این به بعد به چنین درخت‌هایی، «درخت ساده» می‌گوییم.

واضح است که در هر درخت ساده از مرتبه‌ی p ، همواره $\Delta = 2$ (ماکزیمم درجه‌ی درخت ۲ است) و چنین درخت‌هایی دارای ۲ رأس از درجه‌ی ۱ و $(p - 2)$ رأس از درجه‌ی ۲ هستند. و برعکس اگر در یک درخت از مرتبه‌ی p داشته باشیم: $\Delta = 2$ ، چنین درختی حتماً درخت ساده خواهد بود! بنابراین می‌توان گفت: «شرط لازم و کافی برای آن‌که درخت T از مرتبه‌ی p درختی ساده باشد، آن است که: $\Delta = 2$ ».

حال به بیان و در مواردی اثبات قضیه‌های مقدماتی در درخت‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهای این قضایا را در حل آزمون‌ها و آزمون‌ها با هم بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱: در هر درخت از مرتبه p ، همواره بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد).

نتیجه از قضیه ۱: تعداد کل مسیرهای متمایز در هر درخت از مرتبه p ، برابر است با: $\binom{p}{2}$. و می‌دانیم:

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

اثبات: مطابق قضیه ۱، بین هر دو رأس که بتوان از میان p رأس انتخاب کرد، فقط و فقط یک مسیر منحصر به فرد قابل تعریف است. لذا تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از بین p رأس؛ یعنی: $\binom{p}{2}$.

آزمون: در درخت T از مرتبه p ، ۳۶ مسیر متمایز بین رأس‌ها قابل تعریف است. در این درخت در حالت ساده چند رأس درجه ۲ وجود دارد؟

- الف) ۹ ب) ۷ ج) ۶ د) ۸

حل: با توجه به نتیجه ی قبل داریم:

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$$

حاصل ضرب دو عدد صحیح و متوالی برابر با ۷۲ است؛ (یعنی: 9×8).

در درخت ساده T_q ، تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر است با: $9 - 2 = 7$. پس گزینه ی ب صحیح است.

قضیه ۲: اگر در یک درخت داشته باشیم: $\Delta = k$ ، آن‌گاه این درخت حداقل k رأس از درجه ۱ دارد.

اثبات: می‌دانیم در هر درخت، هر یال که از یک رأس عبور کند، در نهایت حداقل به یک رأس درجه ۱ ختم خواهد شد. زیرا دو سر یال‌های از درجه ۱ در درخت‌ها نمی‌توانند به هم وصل باشند (چون دور ایجاد می‌شود که با تعریف درخت تناقض دارد). لذا اگر $\Delta = k$ فرض شود، پس حداقل یک رأس در گراف وجود دارد که درجه ی آن k است و بنابراین k یال از آن رأس عبور می‌کند. چون هر یال حداقل به یک رأس درجه ۱ ختم می‌شود. پس حداقل k رأس از درجه ۱ در چنین درختی وجود خواهد داشت.

قضیه ۳: در هر درخت از مرتبه $p \geq 2$ ، حداقل دو رأس از درجه ۱ وجود دارد.

اثبات: حکم قضیه برای درخت از مرتبه ۲ برقرار است؛ زیرا T_2 ، دقیقاً دو رأس از درجه ۱ دارد. حال برای $p \geq 3$

حکم را در دو حالت ثابت می‌کنیم:

(I) اگر $\Delta = 2$ ، طبق قضایای قبل درخت ساده است و دقیقاً دو رأس از درجه ۱ دارد.

(II) اگر $\Delta \geq 3$ طبق قضیه ۲، درخت حداقل سه رأس از درجه ۱ و در نتیجه حداقل دو رأس از درجه ۱ خواهد داشت.

قضیه ۴: در هر درخت از مرتبه p و با اندازه q داریم: $p = q + 1$. (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد.)

نتیجه ی مهم: در هر درخت، همواره مجموع مرتبه و اندازه ی عددی فرد است.

اثبات) روش اول: چون $p = q + 1$ ، پس: $p - q = 1$. بنابراین p و q می‌باید دو عدد نامفیی و متوالی باشند. و می‌دانیم، از هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره یکی زوج و دیگری فرد است و مجموع یک عدد زوج با یک عدد فرد، همواره فرد است.

روش دوم:

$$p = q + 1 \Rightarrow p + q = q + 1 + q \Rightarrow p + q = 2q + 1$$

فرد

قضیه ۵: در هر درخت از مرتبه p و با اندازه q ، همواره تعداد رأس‌های درجه ۱ از رابطه ی زیر به دست می‌آید:

$$1 = 2 + \sum_{d_i \geq 2} (d_i - 2)$$

اثبات: فرض کنیم، x تعداد رأس‌های درجه ۱ در گراف T از مرتبه p و با اندازه q باشد. در این صورت با توجه به قضیه ی اصلی در گراف‌ها (مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یال‌هاست) داریم:

$$\sum_{i=1}^p d_i = 2q \xrightarrow{q=p-1} \sum_{i=1}^p d_i = 2p - 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^p d_i - 2p = -2$$

$$\sum_{i=1}^p d_i - \sum_{i=1}^p 2 = -2 \Rightarrow \sum_{i=1}^p (d_i - 2) = -2$$

$$\Rightarrow \sum_{d_i=1} (d_i - 2) + \sum_{d_i=2} (d_i - 2) + \sum_{d_i \geq 3} (d_i - 2) = -2$$

$$\Rightarrow -x + 0 + \sum_{d_i \geq 3} (d_i - 2) = -2 \Rightarrow x = \sum_{d_i \geq 3} (d_i - 2) + 2$$

آزمون: اگر $S: 4, 4, x, 3, y, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ دنباله ی

درجه‌ی رئوس یک درخت باشد، در این صورت $(x^2 + y^2)$ کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۳ ج) ۲۵ د) ۱۶

حل: با توجه به رابطه‌ی $p = q + 1$ در هر درخت، چون در این درخت تعداد رئوس $p = 14$ است، پس $q = 13$ و $2q = 26$. در صورتی که مجموع درجات رئوس یا مجموع جملات دنباله عبارت است از:

$$5 + 4 + x + 3 + y + 2 + 1 + \dots + 1 = 26 \Rightarrow x + y = 5$$

و با توجه به نزولی بودن دنباله و این که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، یکی از دو عدد x و y باید فرد باشد. لذا تنها حالت ممکن $x = 3$ و $y = 2$ حاصل می‌شود که در این صورت $x^2 + y^2 = 13$ پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، چهار رأس درجه‌ی ۳ و دو رأس درجه‌ی ۴ و سه رأس درجه‌ی ۵ موجود است و $\Delta = 5$ ، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی د صحیح است، زیرا:

$$1 = \sum_{d_i \geq 2} (d_i - 2) + 2 = \text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱}$$

$$= 2 + (3-2) + (3-2) + (3-2) + (3-2) + (4-2) + (4-2) + (5-2) + (5-2) + (5-2) = 2 + 4 + 4 + 6 = 16$$

آزمون: در یک درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم: $2q - p = 6$. در این درخت حاصل $(p + q)$ کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases} 2q - p = 6 \\ p - q = 1 \end{cases} \Rightarrow q = 7 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow p + q = 15$$

(توجه دارید که گزینه‌های ج و د اعداد زوج هستند و مجموع مرتبه و اندازه هیچ‌گاه نمی‌تواند زوج باشد.)

آزمون: اگر در درخت T ، همه‌ی رأس‌ها فرد باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) اندازه‌ی T فرد است.

ب) اندازه‌ی T زوج است.

ج) T حداقل سه رأس درجه‌ی ۱ دارد.

د) درخت T ساده است.

حل: گزینه‌ی الف صحیح است، زیرا تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد. طبق فرض، همه‌ی رأس‌ها فرد هستند و اگر p تعداد آن‌ها باشد، باید p زوج باشد و چون p و q متوالی

هستند، پس q فرد است.

آزمون: میانگین درجات رئوس یک درخت $1/8$ است.

در این درخت مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۹ ج) ۲۱ د) ۱۳

حل: میانگین درجات رئوس عبارت است از مجموع درجات رئوس تقسیم بر تعداد رئوس؛ یعنی:

$$\frac{2q}{p} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2q}{p} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2q = \frac{1}{8}p + \frac{1}{8}$$

پس داریم:

$$\frac{2q}{p} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2q}{q+1} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2q = \frac{1}{8}q + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 0/2q = 1/8 \Rightarrow q = \frac{1/8}{0/2} = 9 \Rightarrow p = 10 \Rightarrow p + q = 19$$

پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، درجه‌ی هر رأس ۱ یا ۲ است و تعداد رئوس درجه‌ی ۲، سه برابر تعداد رئوس درجه‌ی ۱ است. مجموع درجات رئوس زوج در این گراف کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض می‌کنیم x و y به ترتیب تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ و درجه‌ی ۲ باشند. در این صورت، طبق فرض داریم: $y = 3x$ و می‌توان نوشت:

$$x + y = p = \text{تعداد رئوس}$$

$$x + 2y = 2q = \text{مجموع درجات رئوس}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = p \\ x + 2y = 2p - 2 \end{cases} \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=3x} y = 6$$

پس این درخت شش رأس از درجه‌ی ۲ (رأس زوج) دارد و مجموع درجات رئوس زوج برابر است با: $6 \times 2 = 12$.

آزمون: اگر به گرافی هم‌بند، ۴ یال اضافه شود، گراف k حاصل می‌شود. از این گراف چند یال حذف کنیم تا به درختی از مرتبه‌ی ۵، یعنی T_5 تبدیل شود؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض کنیم، گراف موردنظر G باشد و اندازه‌ی G ، همان q باشد. پس طبق فرض:

$$q + 4 = \frac{5 \times 4}{2} \Rightarrow q = 10 - 4 = 6$$

و می‌دانیم، درخت از مرتبه‌ی ۵ دارای ۴ یال است، پس باید از ۶ یال، ۲ یال کم کنیم تا به درخت مرتبه‌ی ۵ تبدیل شود.