



در حاشیه مثلثات

(قسمت سوم)

اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی

● حمید رضا امیری

اثبات

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 \Rightarrow$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{ز) } \boxed{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

اثبات

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1^3 \Rightarrow$$

$$\sin^6 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^6 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{ح) } \boxed{\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$$

اثبات

$$\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha =$$

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

۱- ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

یادآوری و اثبات چند فرمول مهم مثلثاتی، برای استفاده در

ساده کردن و اثبات اتحادهای مثلثاتی

$$\text{الف) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\text{ب) } \boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha}$$

$$\text{ج) } \boxed{1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

$$\text{د) } \boxed{\tan^n \alpha \cdot \cot^n \alpha = 1}$$

$$\Leftrightarrow \tan^n \alpha = \frac{1}{\cot^n \alpha} \Leftrightarrow \cot^n \alpha = \frac{1}{\tan^n \alpha} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ه) } (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\boxed{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\text{و) } \boxed{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$(\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \cot \alpha - \tan \alpha$$

۲- اتحادهای مثلثاتی

تعریف و روشهای اثبات اتحادهای مثلثاتی و مسائل حل شده
تعریف: هر تساوی مثلثاتی بین چند نسبت مثلثاتی که به ازای
جميع مقادير متغير يا متغيرهای آن همواره برقرار باشد را یک
اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

برای اثبات یک اتحاد مثلثاتی به سه طریق می‌توان عمل نمود
که هرکدام از این روشها را پس از توضیح، با ذکر مثالی و حل از
همان روش، در زیر آورده‌ایم.

روش اول: در این روش، از یک طرف تساوی استفاده کرده
و با کمک گیری از فرمولهای مثلثاتی و برابریهای اثبات شده که
قبلاً آمده است، به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. لازم به ذکر است
که اگر از طرف چپ اتحاد، به طرف راست یا از سمت راست
اتحاد، به سمت چپ برسیم، فرقی ندارد و بستگی به سلیقه و
تشخیص خودمان دارد.

مسئله ۴- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = (1 - \tan x)(1 + \tan x)$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \tan^2 x = (1 - \tan x)(1 + \tan x)$$

تذکر: قبلاً ثابت کردیم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x$$

روش دوم: در این روش، از هر دو طرف تساوی استفاده
می‌شود و با کمک گرفتن از فرمولها و برابریهای اثبات شده، دو
طرف تساوی را ساده کرده تا به یک مقدار مشترک برسیم.

مسئله ۵- اتحاد مثلثاتی صفحه بعد را اثبات کنید (x در ناحیه
اول دایره مثلثاتی):

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\text{ط) } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

اثبات

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

ساده کردن عبارتهای مثلثاتی و مسائل حل شده
برای ساده کردن عبارتهای مثلثاتی، با استفاده از فرمولها و
برابریهای مهم که اهم آنها به اثبات رسید، عبارت مثلثاتی را به
ساده ترین صورت درآورده، به طوری که ساده تر نشود. (در حقیقت،
هرگاه طرف دوم یک اتحاد مثلثاتی را که مفصل درباره آن مطلب
خواهیم گفت، حذف کنیم، عبارتی مثلثاتی به دست می‌آید که اگر
ساده شود، همان طرف دوم حاصل می‌شود.)
مسئله ۱- عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید:

$$A = (\cos x + \sin x - 1)(\cos x + \sin x + 1)$$

$$\Rightarrow A = (\cos x + \sin x)^2 - 1 =$$

$$(1 + 2 \sin x \cos x) - 1 = 2 \sin x \cos x$$

مسئله ۲- عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید:

$$B = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha)$$

$$B = (\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow B = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}$$

تذکر: در حقیقت، از تجزیه کسرها استفاده شده است و به طور

کلی داریم:

$$\frac{A+B-C+D-E}{F} = \frac{A}{F} + \frac{B}{F} - \frac{C}{F} + \frac{D}{F} - \frac{E}{F}$$

مسئله ۳- عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید:

$$C = (\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) =$$

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} - \sin^2 z = \frac{\sin^2 z - \sin^2 z \cos^2 z}{\cos^2 z}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 z \tan^2 z = \frac{\sin^2 z (1 - \cos^2 z)}{\cos^2 z} =$$

$$\frac{\sin^2 z \sin^2 z}{\cos^2 z} = \tan^2 z \cdot \sin^2 z$$

تساوی منطقی $\Leftrightarrow \sin^2 z \tan^2 z = \sin^2 z \tan^2 z \leftarrow$ مسأله ۷- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \sin^2 y + \cos^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x \Rightarrow 1 = 1 \leftarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \text{ حال داریم}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\sin^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^2 y$$

مسأله ۸- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^2 x + \cos^2 x =$$

$$\sin x + \cos x - \sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x =$$

$$\frac{1}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

$$= \sin x - \sin^2 x \cos x + \cos x - \sin x \cos^2 x$$

مسأله ۹- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\cos^2 x = \cot^2 x - \cot^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{سمت راست} = \cot^2 x - \cot^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$= \cot^2 x (1 - \cos^2 x) = \cot^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = \cos^2 x = \text{سمت چپ}$$

مسأله ۱۰- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\cos^2 x \cdot \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} + \frac{\sin^2 x \cdot \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \sin^2 x \text{ داریم}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x$$

$$\text{سمت راست} = \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$\text{سمت چپ} = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} =$$

اتحاد مزدوج

$$\sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

هر دو طرف به عبارت $\frac{1 - \sin x}{\cos x}$ رسید، بنابراین، دو طرف با هم برابرند، لذا اتحاد برقرار است.

روش سوم (روش اثبات بازگشتی): در این روش، ما تساوی را برقرار فرض می‌کنیم و دو طرف تساوی را ساده کرده یا مثلاً یک طرف را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا به یک تساوی منطقی و همیشه درست برسیم (در این راه از همه خواص تساویها علاوه بر فرمولهای مثلثاتی، می‌توان استفاده کرد). به محض این که به تساوی منطقی رسیدیم، همه عملیات را از تساوی منطقی که همیشه برقرار است، به سمت عقب بازمی‌گردیم تا به اتحاد مثلثاتی موردنظر دست یابیم. در این جا نه تنها اتحاد مثلثاتی ثابت شده است؛ بلکه به دست آمده است. در حقیقت، این روش (مرحله برگشت از تساوی منطقی به طرف خود اتحاد) می‌تواند روشی برای ساختن اتحادهای مثلثاتی باشد.

مسأله ۶- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin z \tan z}{\tan z - \sin z} = \frac{\tan z + \sin z}{\sin z \tan z}$$

فرض کنیم اتحاد برقرار باشد با طرفین وسطین و استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\sin^2 z \tan^2 z = \tan^2 z - \sin^2 z \Leftrightarrow \sin^2 z \tan^2 z =$$

از اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{سمت چپ} &= \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 1 \\ &= (1 + \cot^2 x)^2 - 2 \times (1 + \cot^2 x) + 1 \\ &= 1 + \cot^4 x + 2\cot^2 x - 2 - 2\cot^2 x + 1 = \cot^4 x \end{aligned}$$

و اتحاد ثابت شد.

مسئله ۱۴- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin^6 x - \cos^6 x}{2 \sin^2 x - 1} = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x$$

از اتحاد $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{سمت چپ} &= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)}{2 \sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)} \end{aligned}$$

قبل از ثابت کردن: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x)}{(\sin^2 x - \cos^2 x)}$$

$$= 1 - \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)$$

$$= 1 - \sin^2 x + \sin^4 x = \text{سمت راست تساوی}$$

مسئله ۱۵- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$(\tan \alpha + \cot \alpha - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \sqrt{2} \right)$$

$$= \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \rightarrow \text{قبل از ثابت کردن}$$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ} = (\tan \alpha + \cot \alpha - \sqrt{2})(\tan \alpha + \cot \alpha + \sqrt{2})$$

$$\stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha - 2$$

$$= \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 - 2 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$$

۳- نامساویهای مثلثاتی

روشهای اثبات نامساویهای مثلثاتی - مسائل حل شده
برای اثبات برقراری نامساویهای مثلثاتی، روشهای مختلفی

و نیز داریم: $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ اتحاد} = \frac{1}{1 + \cot^2 x} \cdot \cos^4 x \cdot \cot^2 x$$

$$+ \frac{1}{1 + \tan^2 x} \cdot \sin^4 x \cdot \tan^2 x$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \text{سمت راست}$$

قبلاً ثابت شده است

مسئله ۱۱- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x (2 - \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\text{داریم: } (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)^2$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \quad \text{و نیز داریم:}$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x =$$

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x (2 - \sin^2 x \cos^2 x)$$

و اتحاد به دست آمد.

مسئله ۱۲- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x = \tan^2 x - \cot^2 x$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x) \quad \text{قبل از ثابت کردن:}$$

$$\text{سمت چپ} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Rightarrow \tan^2 x - \cot^2 x = \text{سمت راست}$$

مسئله ۱۳- اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x} + 1 = \cot^4 x$$

$$\Rightarrow 2 - 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$$

مسأله ۱۸- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\tan \alpha + \cot \alpha \geq 2$$

برای اثبات این نامساوی از یک نامساوی جبری می توان استفاده کرد که ابتدا آن نامساوی را ثابت می کنیم:

$$a \geq 0 \Rightarrow (1-a)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2a + a^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{دو طرف بر } a \text{ تقسیم}} \frac{1}{a} - 2 + a \geq 0$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

حال با توجه به این که حدود تغییرات تانژانت و کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ می باشد، پس هر عدد حقیقی، می تواند تانژانت یا کتانژانت زاویه ای باشد و بعکس. اگر فرض کنیم $a = \tan \alpha$ ، داریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha \geq 2$$

و حکم ثابت است.

تمرین:

□ عبارتهای مثلثاتی زیر را ساده کنید:

$$۱) A = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$۲) B = \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right)$$

$$۳) C = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$$

$$۴) D = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x - 1}$$

$$۵) E = \frac{\sec \alpha \cdot \sin \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$۶) F = (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha)$$

برحسب نامساوی مورد نظر موجود است. مثلاً بعضی از نامساویهای مثلثاتی را از روشهای ابتکاری و بعضی با استفاده از نامساویهای جبری اثبات می شوند؛ اما می توان یک روش کلی برای اثبات نامساویهای مثلثاتی به کار برد؛ به این صورت که ابتدا نامساوی را اثبات شده و برقرار فرض کرده، سپس با استفاده از خواص نامساویها آن را ساده می کنیم تا به یک نامساوی منطقی برسیم؛ یعنی به یک نامساوی همیشه برقرار، مثلاً، $\sin^2 x \geq 0$ و بلافاصله به محض رسیدن به چنین نامساوی منطقی، از همان نامساوی شروع و روابط را به عقب برمی گردیم تا به نامساوی مزبور برسیم و این جاست که نه تنها نامساوی اثبات شده، بلکه به دست آمده است. در حقیقت، این روش که تقریباً در همه موارد، براحتی نتیجه می دهد، نه تنها روشی است برای اثبات نامساویها؛ بلکه روشی است برای ساختن و طرح مسائل نامساویهای مثلثاتی. حال، به حل چند نمونه از نامساویهای مثلثاتی می پردازیم:

مسأله ۱۶- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}_{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0 \leftarrow \text{نامساوی همیشه برقرار}$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0 \leftarrow \text{حال داریم}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

مسأله ۱۷- درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویه حاده).

$$\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0 \leftarrow \text{نامساوی منطقی}$$

حال داریم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0$$

$$۱۵) \cot \alpha \cdot \sec \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

$$۱۶) \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1} + \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} = 0$$

$$۱۷) \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = 2 \sec \alpha$$

$$۱۸) \sec^r \alpha - \sec^r \alpha = \frac{1}{\cot^r \alpha} + \frac{1}{\cot^r \alpha}$$

$$۱۹) \frac{1 - 2 \cos^r \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$$

$$۲۰) \frac{1}{\sec^r \alpha} + \sec^r \alpha + \frac{1}{\operatorname{cosec}^r \alpha} - \frac{\sec^r \alpha}{\operatorname{cosec}^r \alpha} = 2$$

□ عبارتهای زیر را با تغییر متغیر مناسب به عبارتهای مثلثاتی تبدیل کرده و ساده کنید :

$$۱) A = \sqrt{a^r + x^r}$$

$$۲) B = \frac{1}{x^r + a^r}$$

(راهنمایی : قرار دهید $x = a \tan \alpha$)

$$۳) C = \frac{\sqrt{(a^r + x^r)^r}}{x}$$

$$۴) D = \sqrt{x^r - a^r}$$

$$۵) \frac{1}{x^r \sqrt{x^r - a^r}}$$

(راهنمایی : قرار دهید $x = a \sec \alpha$)

$$۶) \frac{\sqrt{x^r - a^r}}{x^r}$$

$$۷) G = \frac{1 - \tan^r x}{1 + \tan^r x}$$

$$۸) H = (\sec x - \tan x)(\operatorname{cosec} x + 1)$$

$$۹) I = \frac{\operatorname{cosec} x}{1 + \operatorname{cosec} x} - \frac{\operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cosec} x}$$

□ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$۱) \left(\frac{1 + \tan^r \alpha}{\tan \alpha} \right)^r = \frac{1 + \tan^r \alpha}{\tan^r \alpha} + 2$$

$$۲) (\tan \alpha + \cot \alpha)(\tan \alpha - 2 \cot \alpha) = \frac{\tan^r \alpha + \tan^r \alpha - 1}{1 + \tan^r \alpha} - \frac{2 \cot^r \alpha + 2 \cot^r \alpha + 1}{1 + \cot^r \alpha}$$

$$۳) (\sin^r \alpha - \cos^r \alpha + \sqrt{\Delta})(\sin^r \alpha - \cos^r \alpha - \sqrt{\Delta}) = -4(1 + \sin^r \alpha \cos^r \alpha)$$

$$۴) \cos \alpha - \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \tan \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

$$۵) \frac{\cos^r \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\sin^r \alpha} = \cot \alpha - 1$$

$$۶) (\sin \alpha + \cos \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$$

$$۷) \sec^r \alpha - \tan^r \alpha = \sec^r \alpha + \tan^r \alpha$$

$$۸) \frac{1 + \cot \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{\sec \alpha}$$

$$۹) \frac{\tan \alpha}{1 + \sec \alpha} + \frac{1 + \sec \alpha}{\tan \alpha} = 2 \operatorname{cosec} \alpha$$

$$۱۰) \left(\frac{\sin^r \alpha}{\tan^r \alpha} \right)^r \left(\frac{\operatorname{cosec}^r \alpha}{\cot^r \alpha} \right)^r = 1$$

$$۱۱) \frac{\tan \alpha}{1 - \cot \alpha} + \frac{\cot \alpha}{1 - \tan \alpha} = 1 + \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

$$۱۲) \frac{1 + \sec \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$۱۳) \frac{\cos \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cot \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$۱۴) \frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sec \alpha} = \frac{\sin^r \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

