

در حاشیه تابع و مفهوم تابع

(قسمت دوم)

ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان (۱)

◀ حمیدرضا امیری

تشخیص تابع بودن یک رابطه:

در شماره قبل دیدیم که اگر رابطه f از A در B یک تابع باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در آن یافت شود؛ به عبارت دیگر این مفهوم را می توان به صورتهای زیر تعبیر کرد:

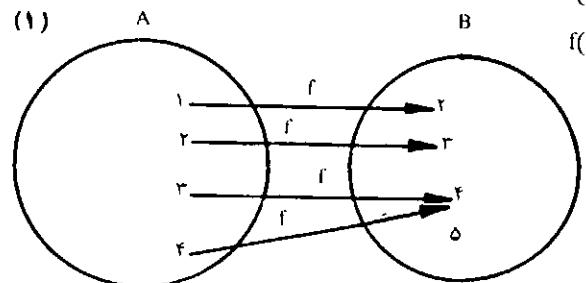
الف) اگر نمودار پیکانی رابطه f رسم شود (هر عضو دامنه را با یک فلش یا پیکان به عضو متناظرش در بُرد مرتبط کنیم)، و از هر عضو دامنه فقط و فقط حداکثر یک پیکان خارج شود در این صورت رابطه f تابع می باشد. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$f(1)=2$$

$$f(2)=3$$

$$f(3)=4$$

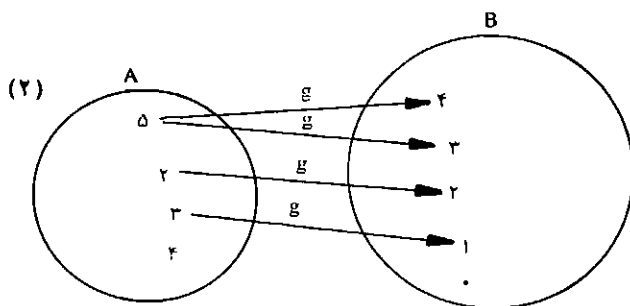
$$f(4)=3$$



$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R_f = \{2, 3, 4\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

f تابع است.



$$D_g = \{5, 2, 3\}$$

$$R_g = \{4, 3, 2, 1\}$$

در این مثال رابطه g از A در B ، یک تابع نیست، زیرا از ۵ که عضو دامنه g می باشد دو پیکان خارج شده است. در واقع: $(5, 3) \in g$ و $(5, 4) \in g$ که با تعریف تابع تناقض دارد و در نتیجه، $g = \{(5, 4), (5, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ تابع نیست.

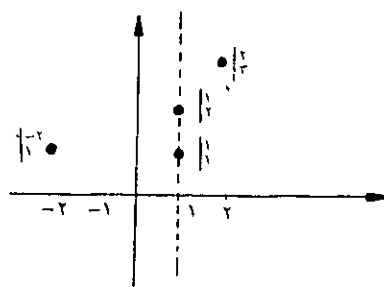
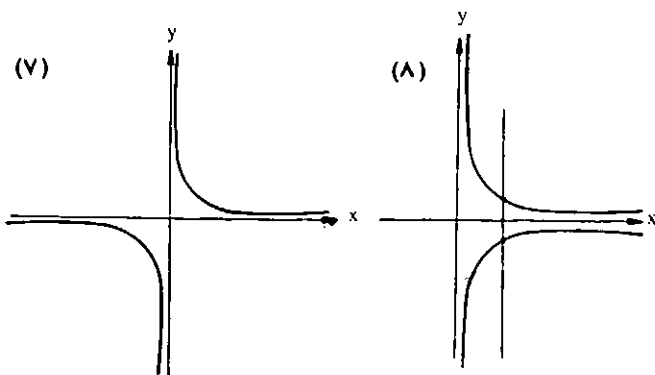
ب) اگر نمودار مختصاتی رابطه f را رسم کنیم (به هر زوج مرتب در f یک نقطه نسبت بدهیم، که مؤلفه اول طول نقطه و مؤلفه دوم عرض آن باشد) و هیچ دو نقطه ای روی خطی موازی با محور y ها واقع نشوند، رابطه f تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید:

(۱) اگر $f = \{(1, 2), (1, 1), (2, 3), (-2, 1)\}$ در این صورت

نمودار مختصاتی رابطه f به این صورت است.

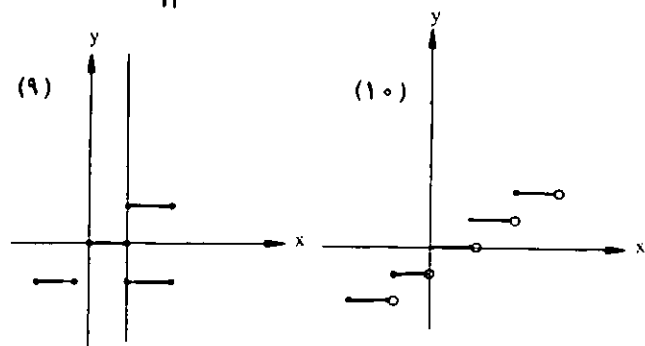
همان طور که مشاهده می کنید دو نقطه از این نقاط روی

خطی موازی با محور y ها قرار دارند (طول نقاط با هم برابر و



عرض آنها متمایز است) و لذا f تابع نیست.

لازم به تذکر است که عکس این مطلب برای تشخیص تابع بودن یک رابطه مورد استفاده قرار می گیرد، یعنی اگر نمودار یک رابطه مفروض باشد، برای تشخیص تابع بودن آن کافی است خطوطی موازی یا محور y ها رسم کنیم، اگر حتی یک خط نمودار رابطه را در بیش از یک نقطه قطع کند، رابطه مزبور تابع نیست و اگر هیچ خطی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند، آن رابطه تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید:



با توجه به این مطالب مشاهده می کنید که نمودارهای (۲) و (۳) و (۵) و (۶) و (۸) و (۹) نمی توانند نمودار یک تابع باشند، زیرا در هر کدام از آنها می توانید خط یا خطوطی موازی یا محور y ها رسم کنید، به طوری که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

ج) اگر بخواهیم تعریفی به زبان ریاضی برای تابع f بیان کنیم می توانیم بنویسیم:

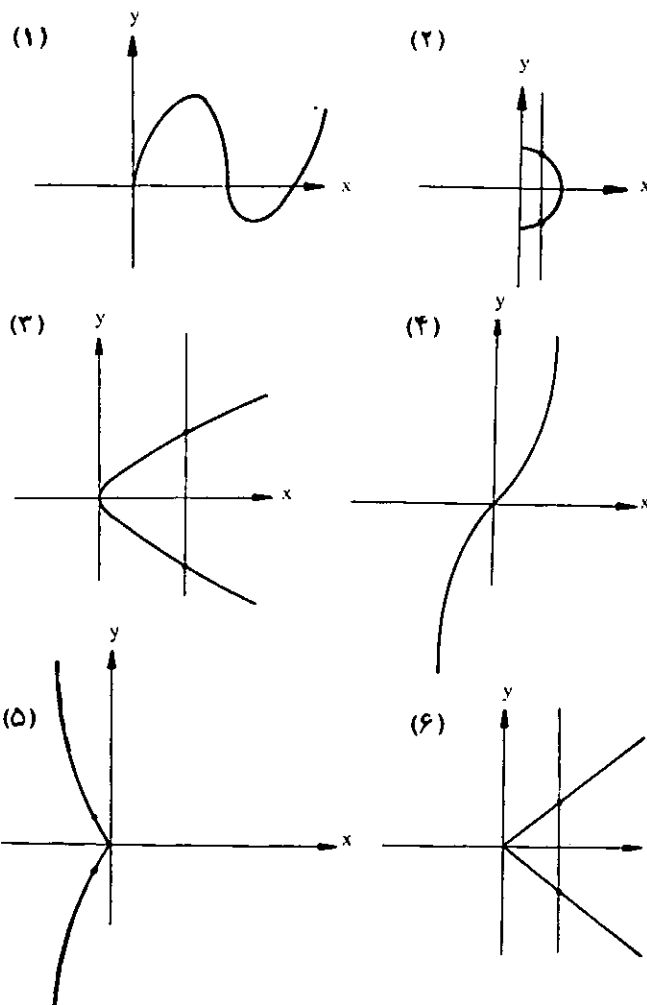
رابطه f تابع است $\Leftrightarrow [(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in f] \Rightarrow y_1 = y_2$ و تعریف فوق به این معنی است، که اگر رابطه f تابع باشد، نباید دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه های اول برابر داشته باشد، و اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های اول برابر در f یافت شود، باید مؤلفه های دوم نیز برابر باشند، تا در واقع دو زوج متمایز نباشند. حال اگر f را با ضابطه اش مشخص کنند، با استفاده از

تعریف فوق می توان بی برد، که آیا f تابع است یا خیر؟

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

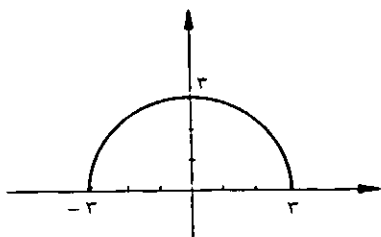
(۱) آیا رابطه f با ضابطه $f(x) = x^2$ تابع است؟



$f(x) = y = x^2 \rightarrow$ طبق فرض داریم

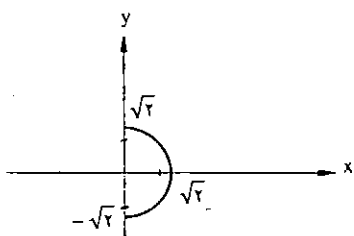
اگر $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in f \Rightarrow f(x_1) = y_1, f(x_1) = y_2$

قسمت، عرض مثبت داشته باشند، مطابق شکل زیر:



(۶) اگر $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ | x^2 + y^2 = 2\}$ ، آیا رابطه h یک تابع است؟

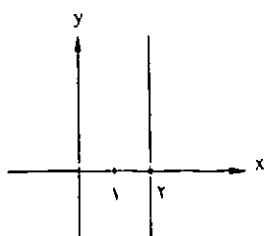
$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2 - x^2}$
مثلاً اگر قرار دهیم $x = 1$ در این صورت $y = \pm 1$ یعنی برای $x = 1$ که عضوی از دامنه است دو عضو از برد $(y = \pm 1)$ به دست می‌آید لذا h تابع نیست و نمودار آن به شکل زیر است (قسمتی از دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$ که هر نقطه واقع بر آن دارای طول مثبت باشد)، مطابق شکل زیر:



و همان‌طور که مشاهده می‌کنید، می‌توان خطی موازی محور y ها چنان رسم کرد که نمودار این رابطه را در دو نقطه قطع کند.

(۷) اگر $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2\}$ ، آیا رابطه f تابع است؟
در این رابطه y به x بستگی ندارد (واضح است که y تابع متغیر x نیست) و همواره می‌توان هر مقدار دلخواه برای y و به ازای هر یک مقدار x ، در نظر گرفت مثلاً: $(2, 1) \in f$ و $(2, 2) \in f$ ، پس f تابع نیست.

نمودار رابطه f خطی موازی با محور y ها و به فاصله ۲ واحد از مرکز، مطابق شکل زیر:



f تابع است $\Rightarrow x_1^2 = y_1, x_1^2 = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(۲) آیا رابطه f با ضابطه $y = f(x) = 2x^2 + 1$ تابع است؟

اگر $(x_1, y_1) \in f, (x_1, y_2) \in f \Rightarrow f(x_1) = y_1, f(x_1) = y_2$
 $\Rightarrow 2x_1^2 + 1 = y_1, 2x_1^2 + 1 = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(۳) آیا رابطه f با ضابطه $y = f(x) = \pm \sqrt{x}$ تابع است؟

$$f(x) = y = \pm \sqrt{x} \Rightarrow f(2) = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(2) = \sqrt{2}, f(2) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (2, \sqrt{2}) \in f, (2, -\sqrt{2}) \in f \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

تذکر مهم: هرگاه ضابطه رابطه f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم، اگر برای هر x حداکثر یک y حاصل شود، ضابطه یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست.

(۴) اگر: $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ ، آیا رابطه f یک تابع است؟

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

$$x = 1 \text{ اگر } y = \pm \sqrt{3} \Rightarrow (1, \sqrt{3}) \in f$$

$$, (1, -\sqrt{3}) \in f \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

تذکر مهم: در مثال (۴) نمودار رابطه f دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع 2 ، و دیدیم که f تابع نبود، این مطلب را می‌توان به صورت کلی نیز پذیرفت که «نمودار هر رابطه که به شکل یک منحنی یا چند ضلعی بسته باشد، همواره مشخص‌کننده یک تابع نیست» (همواره در هر شکل بسته می‌توان خطی موازی محور y ها چنان رسم کرد، که منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کند).

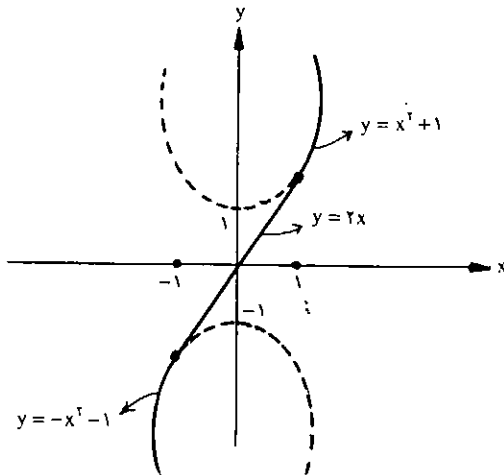
(۵) اگر $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | x^2 + y^2 = 9\}$ ، آیا رابطه g یک تابع است؟

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{9 - x^2}, y \geq 0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow g \text{ تابع است}$$

(توجه دارید، که اگر $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ در این صورت نمودار تابع فوق در واقع قسمتی از دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است، که همه نقاط واقع بر آن

رابطه در دامنه‌هایشان عضو مشترک ندارند و در ضمن در هر قسمت، ضابطه تعریف شده می‌تواند یک تابع را مشخص می‌کند (برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای $f(x)$ به دست می‌آید). اگر نمودار این رابطه را رسم کنیم به صورت زیر است:



با توجه به شکل واضح است که f یک تابع است و در واقع به تابع f یک تابع چند ضابطه‌ای می‌گویند. تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساوی یکدیگرند، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$D_f = D_g \quad (\text{الف})$$

(ب) برای هر $x \in D_f = D_g$ همواره $f(x) = g(x)$ باشد.
مثال ۱) آیا دو تابع $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ مساوی یکدیگرند؟

اگر کمی بی‌توجهی کنیم و مثلاً تابع $g(x)$ را به صورت

$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = (x+1)$ بنویسیم شاید گمان ببریم که $f = g$ است، ولی شرط اول تساوی دو تابع برای این تابعها برقرار نیست، زیرا: $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ و چون $D_f \neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

مثال ۲) آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ مساوی

یکدیگرند؟

جواب مثبت است، زیرا اولاً: $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و ثانیاً برای

هر $x \in \mathbb{R}$ همواره:

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$$

مثال ۳) آیا دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x|x|$ مساوی

یکدیگرند؟

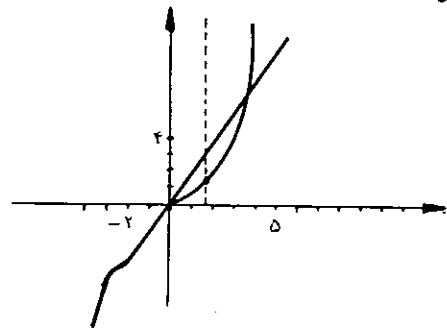
(خط $x = 2$ ، خودش موازی با محور y ها است و بی‌شمار نقطه با طولهای مساوی را در بردارد.)

حال قبل از آن که به سراغ تعریف و خواص و کاربردهای انواع تابعها برویم، ابتدا رابطه‌های چند ضابطه‌ای را معرفی می‌کنیم و به بررسی خاصیت‌های آنها می‌پردازیم. هرگاه دامنه یک رابطه را چند قسمت کنیم (ممکن است این قسمت‌ها با هم اشتراک داشته باشند) و روی هر قسمت ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک رابطه چند ضابطه‌ای حاصل می‌شود.

مثال ۱) رابطه f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 2x & -2 < x \leq 0 \\ x^2 & x \leq -2 \end{cases}$$

در این مثال و مثالهای مشابه آن همواره در قسمت‌هایی از دامنه که ضابطه‌ها با هم اشتراک دارند، برای یک مقدار x دو مقدار برای y می‌توان یافت که با تعریف تابع تناقض ایجاد می‌شود، در این مثال ضابطه‌های اولی و دومی در دامنه‌شان اشتراک دارند و مثلاً، $f(1) = 1^2 = 1$ و $f(1) = 2 \times 1 = 2$ یعنی $(1,1) \in f$ و $(1,2) \in f$ پس f تابع نیست، نمودار این رابطه به صورت زیر است:



مثال ۲) رابطه f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده آیا این رابطه تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ضابطه‌های تعریف در این

برای رسم تابع فوق کافی است نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کنیم و روی هر کدام از نمودارها قسمتهایی را که در دامنه‌اشان است، پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.



تفریح اندیشه ۲

بازی چینی

چند سال پیش در یک فیلم گنج‌کننده فرانسوی مردی در راهروهای قصری به این طرف و آن طرف می‌رفت و تمام اشخاص را در یک بازی ساده شکست می‌داد. در این بازی شانزده امتیاز شمار (به‌طور مثال چوب کبریت) در ردیفهای ۱، ۳، ۵ و ۷ تایی قرار داده شده‌اند. دو بازیکن، به‌نوبت، می‌توانند از چوب کبریتها هر قدر که بخواهند انتخاب کنند. (چوب کبریتها برای انتخاب شدن نیاز به مجاور بودن ندارند؛ انتخاب آنها از وسط هر ردیف امتیاز نمی‌آورد.) برای بردن باید حریف را وادار کنید تا آخرین امتیاز شمار روی میز را بردارد.

بازی مزبور توسط چینیهای باستان اختراع شده، و برنده‌شدن در آن - اگر راه آن را بدانید - آسان است. برای شروع، آیا ابتدا خود عمل می‌کنید یا این امتیاز را به حریفان می‌دهید؟ یا، این مطلب دارای اهمیت نیست؟ برای بردن چگونه بازی می‌کنید؟

جواب در صفحه ۸۷

خیر، زیرا شرط دوم تساوی بین دو تابع برای این تابعها برقرار نیست، در صورتی که: $D_f = D_g$ ، ولی مثلاً:

$$f(-1) = 1 \text{ و } g(-1) = -1 \times 1 = -1$$

پس دو تابع مساوی نیستند. $\Rightarrow f(-1) \neq g(-1) \Rightarrow$

مثال ۴) دو تابع $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = x^2 + 3x^2$

مفروض‌اند، با چه شرایطی می‌توان ادعا کرد که $f = g$ ؟

چون $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ است پس شرط اول تساوی دو تابع برقرار است، لذا می‌بایست برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x) = g(x) \text{، یعنی باید:}$$

$$x^2 + 3x^2 = x^2 - x \Rightarrow x^2 + 2x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1$$

در واقع مقدار دو تابع f و g فقط در $x = 0$ و $x = -1$ با هم مساوی است، یعنی همواره:

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad f(-1) = 2, \quad g(-1) = 2$$

پس شرط تساوی این دو تابع آن است، که دامنه‌های آنها را از مجموعه $\mathbb{R}$ به مجموعه $D = \{0, -1\}$ محدود کنیم، در واقع این دو تابع در دامنه تعریف خودشان مساوی نیستند و فقط در صورتی که دامنه هر یک را $\{0, -1\}$ تعریف کنیم با هم مساویند.

انواع تابعها

۱ - تابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنه یک تابع را به چند مجموعه جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه باشد و روی هر مجموعه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک تابع با چند ضابطه یا اصطلاحاً یک تابع چند ضابطه‌ای به دست می‌آید، به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: تابع f به صورت زیر تعریف شده است، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$$