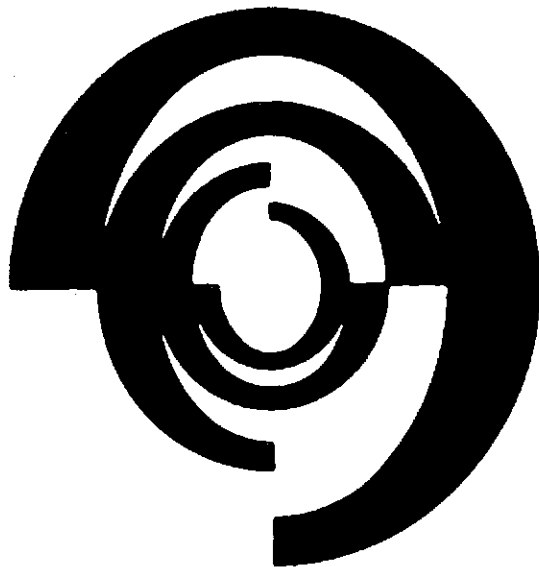


در حاشیه تابع

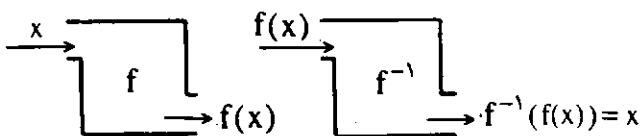
(قسمت چهارم)

● حمیدرضا امیری



تابع معکوس و معکوس تابع

f^{-1} را در حکم دو ماشین تابع در نظر بگیریم، همواره ورودی تابع f ، x ها بوده و خروجی آن $f(x)$ و ورودی تابع f^{-1} ، $f(x)$ ها هستند و خروجی f^{-1} ، x ها می باشند.

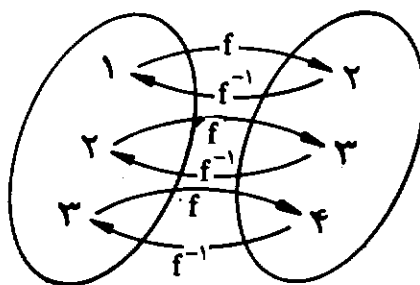


در حالت کلی اگر $f(x) = y$ ، در این صورت $f^{-1}(y) = x$ و برعکس، حال با توجه به تابع f که در ابتدای این مبحث به آن اشاره شد یعنی $f(x) = x + 1$ و این که تابع f روی اعضای دامنه به این شکل اثر می کند، که ۱ واحد به آنها اضافه می کند، می خواهیم ضابطه f^{-1} را بیابیم، بدیهی است که اگر $y = x + 1$ ، ضابطه f باشد (ضابطه f برحسب x است) کافی است x را برحسب y بیابیم. یعنی $x = y - 1$ که این ضابطه، ضابطه f^{-1} است. یعنی $f^{-1}(y) = y - 1$ ، اگر در حالت کلی f^{-1} را برحسب x یا z بیان کنیم به ترتیب خواهیم داشت، $f^{-1}(x) = x - 1$ و $f^{-1}(z) = z - 1$.

بنابراین اگر بتوانیم ضابطه f^{-1} را از روی ضابطه f به دست آوریم، در این حالت و با توجه به تعریف ترکیب توابع می توانیم تابع معکوس را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف: تابعهای f و g معکوس یکدیگرند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

فرض کنید روی مجموعه اعداد طبیعی تابع f با ضابطه $f(x) = x + 1$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ حال اگر وارون f یعنی f^{-1} را تشکیل دهیم، خواهیم داشت $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ اگر نمودار پیکانی این دو رابطه را رسم کرده، با هم مقایسه کنیم، مشاهده می شود که این دو رابطه اثر یکدیگر را خنثی می کنند، یعنی هر عضوی را که f از مجموعه اول به مجموعه دوم منتقل می کند f^{-1} ، آن عضو را به جای قبلی خود برمی گرداند.



$$f(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$$

$$f(2) = 3, \quad f^{-1}(3) = 2$$

$$f(3) = 4, \quad f^{-1}(4) = 3$$

همان طور که ملاحظه می شود همواره، $D_f = R_{f^{-1}}$ و

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

این مطلب را می توان به صورت زیر نیز توجیه کرد که اگر f و

الف) به ازای هر $x \in D_g$ از $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$

ب) به ازای هر $x \in D_f$ از $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$

در این صورت g را با f^{-1} و f را با g^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال: نشان دهید که دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = (x-1) + 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x^2 + 1 - 1}) = \sqrt{x^2} = x$$

پس طبق تعریف دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

شاید این مطلب در ذهن ایجاد شود که چون $f(g(x)) = x$

و $g(f(x)) = x$ پس اگر f و g وارون هم باشند باید

$f \circ g = g \circ f$ که این مطلب در حالت کلی صحیح نمی‌باشد و

برای روشن شدن مطلب f و g را به صورت مجموعه‌هایی از زوجهای مرتب و وارون یکدیگر در نظر می‌گیریم، توجه کنید!

$$f = \{(2, 3), (3, 4), (1, 5)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = g = \{(3, 2), (4, 3), (5, 1)\}$$

$$f \circ g = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

$$g \circ f = \{(2, 2), (3, 3), (1, 1)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو تابعهای

همانی هستند ولی $f \circ g \neq g \circ f$ می‌باشد.

نامی که در ابتدای این بحث به کار بردیم، تابع معکوس و

معکوس تابع بود. اکنون این سؤال پیش می‌آید که، آیا همواره

اگر f یک تابع باشد، f^{-1} نیز تابع است یا خیر؟

مثلاً اگر $f = \{(2, 3), (3, 4)\}$ ، واضح است که f طبق تعریف

تابع، یک تابع است و $f^{-1} = \{(3, 2), (4, 3)\}$ نیز تابع است که در

این حالت f^{-1} را تابع معکوس f نامیده و اصطلاحاً می‌گوییم

تابع f معکوس پذیر است. اما اگر فرض کنیم

$$f = \{(2, 3), (3, 3)\}$$

با توجه به تعریف تابع نمی‌باشد، که در این حالت f^{-1} را

فقط می‌توان معکوس f نامیده و می‌گوییم f معکوس پذیر نیست.

اگر کمی دقت کنید، مشاهده می‌کنید در این مثال، f تابع

است ولی یک به یک نیست. یعنی زوج مرتبه‌های آن دارای

مؤلفه‌های دوم برابر هستند و همین امر باعث می‌شود در f^{-1}

زوج مرتبه‌هایی با مؤلفه‌های اول برابر تولید شوند که تابع بودن f^{-1} را

نقض می‌کند و اگر چنین زوج مرتبه‌هایی (با مؤلفه‌های دوم برابر)

در f یافت نشود، در f^{-1} نیز زوج مرتبه‌هایی با مؤلفه‌های اول

برابر یافت نخواهد شد و f^{-1} تابع می‌شود. پس معکوس پذیر

بودن تابع f را به صورت زیر به شکل قضیه‌ای می‌توان بیان کرد:

قضیه: تابع f معکوس پذیر است، اگر و فقط اگر یک به یک

باشد.

مثال: ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

معکوس پذیر است و ضابطه تابع معکوس آن را بیابید.

برای اثبات معکوس پذیری تابع طبق قضیه کافی است ثابت

کنیم تابع f یک به یک است پس،

$$\text{فرض کنیم } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1+2} = \frac{2x_2-1}{x_2+2}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + 4x_1 - x_2 - 2 = 2x_1x_2 + 4x_2 - x_1 - 2$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{تابع } f \text{ یک به یک است.}$$

$$\text{فرض کنیم } y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow xy - 2x = -2y - 1 \Rightarrow x(y-2) = -2y-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{y-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2} \quad (\text{ضابطه } f^{-1} \text{ بر حسب } x)$$

تذکر مهم: می‌خواهیم از نظر نموداری، وضعیت یک تابع

معکوس پذیر و معکوس آن را بررسی کنیم، اولاً چون f

معکوس پذیر است پس طبق قضیه یک به یک است و لذا خطی

موازی با محور x ها نمی‌تواند نمودار f را در بیش از یک نقطه

قطع کند، از طرفی اگر $(a, b) \in f$ یا $f(a) = b$ با توجه به

تعریف f^{-1} واضح است که $(b, a) \in f^{-1}$ یا $f^{-1}(b) = a$ پس

از آنجایی که دو نقطه (a, b) و (b, a) نسبت به خط $y = x$

تقارن دارند به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای f و

f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه محوری یکدیگرند. پس

به راحتی با در اختیار داشتن نمودار تابع f و توجه به مطلب فوق

به راحتی می‌توان به نمودار f^{-1} دست پیدا کرد. در شکل زیر

این مطلب مشاهده می‌شود:

قبل از محاسبه وارون f ، ابتدا متذکر می‌شویم که قضیه قبل قابل تعمیم است، یعنی برای سه تابع f و g و h و حتی بیشتر نیز می‌توان قضیه را به کار برد مثلاً برای سه تابع f و g و h داریم:

$$(fogoh)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$$

حال اگر قرار دهیم $f(x) = x + 3$ و $g(x) = x^2$ و

$$k(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{که واضح است که}$$

$$k^{-1}(x) = 3x, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad f^{-1}(x) = x - 3$$

$$h(x) = (kogof)(x) \quad \text{و}$$

$$\text{زیرا } (kogof)(x) = ko(g(f(x))), \quad g(f(x)) = (x+3)^2$$

$$\Rightarrow ko(g(f(x))) = \frac{1}{3}(x+3)^2$$

$$\text{پس: } h^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ k^{-1})(x) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ k^{-1})(x)$$

$$\Rightarrow h^{-1}(x) = f^{-1} \circ (g^{-1}(k^{-1}(x))) = f^{-1} \circ (g^{-1}(3x)) = f^{-1}(\sqrt{3x})$$

$$\Rightarrow h^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{3x}) = (\sqrt{3x}) - 3$$

تمرین:

۱- تابع f به معادله $f(x) = x^2 - 2x + 3$ در کدام یک از فاصله‌های زیر معکوس پذیر است.

الف) $(-\infty, 1)$ ب) $(-\infty, 1]$ ج) $(1, +\infty)$ د) $[1, +\infty)$

۲- ثابت کنید تابع f به معادله $f(x) = 2\sqrt{x-2} + x$ معکوس پذیر بوده و ضابطه f^{-1} را بر حسب x بیابید.

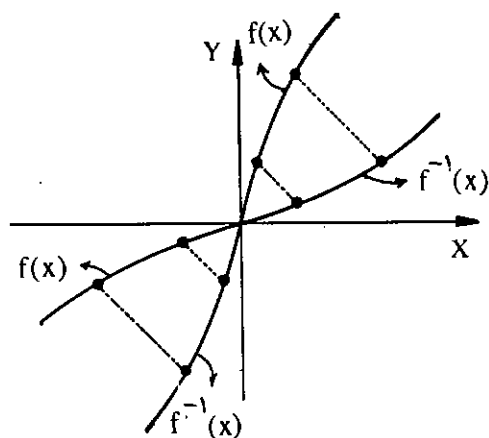
۳- ثابت کنید تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ معکوس پذیر بوده و ضابطه f^{-1} را بیابید.

۴- اگر $h(x) = 2(x-1)^2$ در این صورت ضابطه h^{-1} را بیابید.

۵- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ در این صورت $f^{-1}(x)$ را بیابید.

۶- هر یک از حالت‌های زیر را بررسی کنید که آیا دو تابع داده شده f و g ، وارون یکدیگرند یا خیر؟

$$\text{الف) } f(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = 2\sqrt{\frac{2y+1}{3}}$$



مثال: فرض کنید $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x + 1$ در این صورت هر یک از تابعهای f^{-1} و g^{-1} و $(fog)^{-1}$ و $g^{-1} \circ f^{-1}$ را محاسبه کرده و رابطه $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ را تحقیق کنید. چون f و g هر دو تابعهای یک به یک هستند لذا معکوس پذیر بوده و داریم:

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 1$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y - 1) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = (2x + 1) - 1 = 2x$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}(x) = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}[(x + 1) - 1] = \frac{1}{2}x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

تذکر مهم: مطلبی که در مثال قبل تحقیق شد، تصادفی نبوده و در حالت کلی نیز برقرار بوده و می‌توان آن را به صورت قضیه زیر بیان کرد:

قضیه: اگر f و g دو تابع معکوس پذیر باشند همواره، $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

نتیجه مهم: این قضیه را می‌توان به صورت بسیار مناسبی در محاسبه وارون تابعهایی که بتوان آنها را به شکل ترکیب چند تابع نوشت، به کار برد.

مثال: وارون تابع با ضابطه $h(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2$ را به دست آورید.



ادب ریاضی

اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً احتیاج به تجربه نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجه و علاقه‌مندی لازم بود. اما چه کسی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی است که چون گله خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همه آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد، اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً جهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند، زیرا مرغ خانگی نیز که حساب و حساب کردن نمی‌داند هنگامی که یکی از جوجگان او غائب باشند ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی چه چوپان و چه آن کشاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعه خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر در نتیجه احتیاج مجبور شدند نوعی وسیله شمارش دقیقتر، غیر از غریزه طبیعی خود، به وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب کردن آماده و مهیایی بود.

تاریخ علوم

بی‌پرو سو

ترجمه: حسن صفاری

ب) $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$

ج) $f(x) = x^5 + 1$ و $g(x) = \sqrt[5]{x - 1}$

د) $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \arcsin x$

ه) $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \cotg(x)$

۷ - کدام یک از تابعهای زیر معکوس پذیر می‌باشند؟

(برای هر $x \geq 0$) ب) $f(x) = x^2 - x$ الف) $f(x) = x^2 + x$

ج) $f(x) = 2x^2 - 4$ د) $f(x) = \frac{4-x}{3x+2}$

ه) $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$ (برای هر $x \geq 0$)

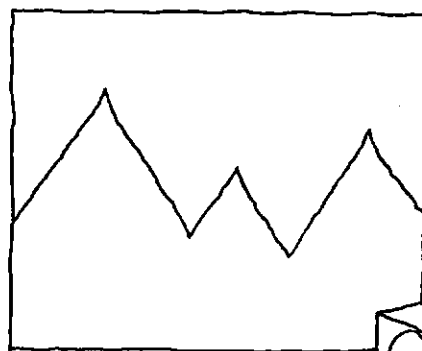
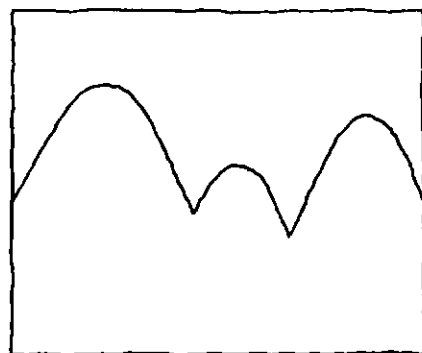
و) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

۸ - ثابت کنید که اگر تابع f ، زوج باشد، معکوس پذیر

نیست.

۹ - ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ با معکوس خود

برابر است.



Mauricio Henrique

