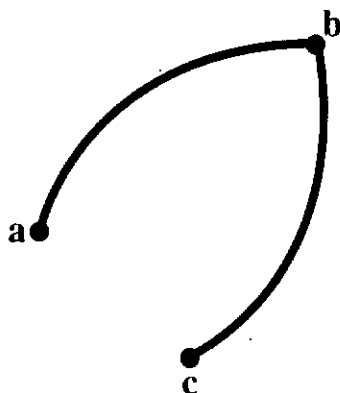


در حاشیه گراف‌های ساده

ماتریسی وقوع گراف ساده



	ab	bc
a	1	0
b	1	1
c	0	1

© افسان یار محمدی

آرتور کیلی^۱ ریاضیدان انگلیسی تباری که در شانزدهم اوت سال ۱۸۲۱ میلادی در ریچموند^۲ ناحیه سوری^۳ جزیره بریتانیا به دنیا آمد، اولین کسی بود که ماتریس را در ریاضیات مطرح کرد. ۱۰

سال بعد از این که گوستاو کیرشهف (۱۸۸۷ - ۱۸۴۲) در تعمیم قوانین اهم برای جریان الکتریکی، در کاربردهایی که شامل شبکه‌های الکتریکی بودند، نوع خاصی از گراف‌های همبند و بدون دور را مطرح ساخت، آرتور کیلی توانست، هنگام شمارش ایزومرهای متمایز هیدروکربن‌های اشباع شده‌ای به نام آلکان با فرمول عمومی « C_nH_{2n+2} » ($n \in \mathbb{N}$) نام درخت را برای این گراف‌های همبند و بدون دور، اختیار کند. بنابراین می‌توان از او به عنوان یکی از کسانی نام برد که با مطرح کردن ماتریس و نهادن نام درخت بر یک گراف خاص، در پیشبرد نظریه گراف نقشی را ایفا کرده‌اند.

کیلی در حالی که فعالیت علمی خویش را تا یک هفته قبل از مرگش ادامه می‌داد، در روز بیست و ششم ژانویه سال ۱۸۹۵ میلادی، بعد از تحمل یک بیماری دردناک و

بلندمدت، وفات یافت.

به هر گراف ساده $G = (V, E)$ از مرتبه p و اندازه q که دارای یک مدل ریاضی با عنوان نمودار گراف G است، می‌توان یک ماتریس از مرتبه $p \times q$ نسبت داد که به ماتریس «وقوع گراف G » شهرت دارد و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب که در مقابل p سطر این ماتریس، رأس‌های $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ را از مجموعه رأس‌های $V_1, V_2, \dots, V_p$ گراف G و در مقابل q ستون این ماتریس، یال‌های $E = \{E_1, E_2, \dots, E_q\}$ را از مجموعه یال‌های $E_1, E_2, \dots, E_q$ گراف G می‌نویسیم.

در این صورت ماتریس وقوع گراف ساده G ، شامل درایه‌های صفر و یک است. بدین ترتیب که اگر رأس V_i ابتدا یا انتهای یالی از گراف G باشد، درایه ماتریس $M(G)$ یک و در غیر این صورت صفر است.

مثال ۱. در گراف ساده $G = (V, E)$ داریم: $V = \{x, y, z\}$ ، $E = \{xy, yz, zx\}$. بنابراین ماتریس وقوع

برهان

هر عدد یک که در سطر i ام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس V_i یک یال عبور کرده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر i ام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس V_i عبور کرده‌اند. در نتیجه، مجموع این یک‌ها، درجه رأس V_i را نشان می‌دهد.

قضیه ۲

گراف ساده $G = (V, E)$ از مرتبه p ، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های سطرهای

ماتریس $M(G)$ ، برابر $\sum_{i=1}^p \deg(V_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های سطر i ام ماتریس $M(G)$ ، برابر با درجه رأس V_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های سطرهای

ماتریس $M(G)$ ، برابر با $\sum_{i=1}^p \deg(V_i)$ است.

مثال ۱. ماتریس وقوع گراف ساده $G = (V, E)$ ، عبارت است از:

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} xy & yz & yw & zw & xw \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین در گراف ساده G ، $\deg(x) = \deg(z) = 2$ و $\deg(y) = \deg(w) = 3$ است.

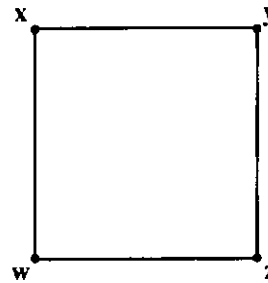
مثال ۲. ماتریس وقوع گراف ساده $G = (V, E)$ ، به صورت زیر است.

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} xy & yz & zx \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$xy \quad yz \quad zx$

این گراف به صورت $M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ است.

مثال ۲. نمودار گراف ساده $G = (V, E)$ شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف ساده به این صورت است.

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} xy & yz & zw & wx \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف ساده $G = (V, E)$

۱. ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال ۱)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی باشد، یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی نباشد.

۲. چون گراف ساده مورد بحث ساده است، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره صفر و یک هستند.

اکنون که با ماتریس وقوع گراف ساده G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱

گراف ساده $G = (V, E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های سطر i ام ماتریس $M(G)$ برابر با درجه رأس V_i است.

بنابراین در گراف ساده G داریم:

$$\sum_{i=1}^p \deg(V_i) = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

قضیه ۳

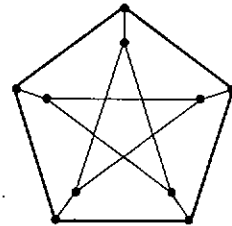
ماتریس وقوع گراف ساده همبند و بدون دور

$G = (V, E)$ ، مربعی نیست.

برهان

از آن جا که گراف G همبند بدون دور است، نتیجه می گیریم که درخت است. بنابراین، در این درخت که از مرتبه p و اندازه q است، همواره داریم: $p = q + 1$. بنابراین، ماتریس $M(G)$ که از مرتبه $p \times q$ است، مربعی نیست.

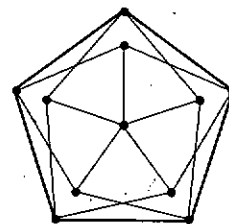
آزمون ۱. شکل زیر نمودار گراف «پترسن» است. تعداد درایه های یک ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۱۵۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۳۰ (د) ۶۰

جواب: گزینه (ج) صحیح است. چون گراف «پترسن» از مرتبه ۱۰ و اندازه ۱۵ است، بنابراین طبق قضیه ۲، تعداد یک های ماتریس وقوع آن برابر $2q = 30$ می شود.

آزمون ۲. شکل زیر نمودار گراف «گروتز» است. تعداد درایه های صفر ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۲۲۰ (ب) ۴۰ (ج) ۱۸۰ (د) ۸۰

جواب: گزینه (ج) صحیح است. چون گراف «گروتز» از مرتبه ۱۱ و اندازه ۲۰ است. پس بنابر قضیه ۲، تعداد یک های ماتریس وقوع آن برابر $2q = 40$ و تعداد درایه های صفر ماتریس وقوع آن برابر $p \times q - 2q = 180$ است.

زیرنویس

1. Arthur Cayley
2. Richmond
3. Surrey

منابع

۱. ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی. دفتر برنامه ریزی و تألیف کتاب های درسی.
۲. نظریه گراف. حسین ابراهیم زاده قلزم. انتشارات مدرسه.
3. M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak Foster, Graphs and Digraphs wadsworth International Group.
۴. آشنایی با ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی. سیدحسین سیدموسوی و جواد ترکمن. انتشارات مبتکران.

ادب ریاضی

در این شماره، مجموعه ای از مقالات علمی و پژوهشی در زمینه های مختلف ریاضیات و کاربردهای آن ها، به همراه گزارش هایی از کارگاه ها و کارگاه های آموزشی، به شما عزیزان تقدیم می شود. در این شماره، به ویژه به موضوعات زیر پرداخته شده است:

رشته های گوناگون ریاضی مانند: نظریه شبکه ها، جبر جامع، توپولوژی، معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی، تاریخ ریاضیات و کاربردهای گوناگون ریاضی، به خصوص در مهندسی هسته ای، به چاپ رساند. وی یا به تنهایی و یا با همکاری دیگران، ده عنوان کتاب نوشته است. پنجاه دانشجو نیز رساله، دکترای خود را به راهنمایی او گذرانده اند.