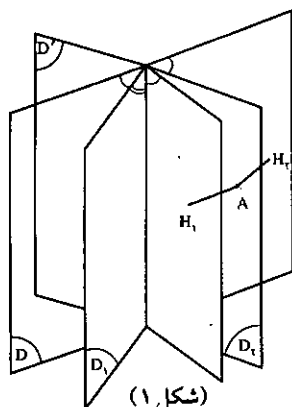




۱. صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه

هرگاه $D: ax + by + cz + d = 0$ و $D': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادله‌های دو صفحه متقاطع باشند، مکان هندسی نقاطی از



فضا که از دو صفحه D و D' به یک فاصله باشند، دو صفحه متمایز است که صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه می‌باشند. برای یافتن معادله‌های صفحه‌های نیمساز، ابتدا فرض کنیم نقطه‌ای از مکان هندسی باشد که فاصله A تا

دو صفحه D و D' برابر است؛ یعنی $AH = AH'$

هندسه تحلیلی، اجتماع هندسه و جبر است، در این بخش از ریاضی، مفاهیم هندسی را به صورت جبری یعنی با یک معادله تجزیه و تحلیل می‌کنیم. همچنین معادله‌های مشخص جبری را به صورت هندسی تعبیر می‌کنیم. برای مثال؛ مکان هندسی نقاطی را که در معادله زیر صدق می‌کنند، یک صفحه در فضا تعبیر می‌کنیم که از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N} = (a, b, c)$ عمود است.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

رسم نمودار معادله‌های جبری و یافتن معادله‌هایی برای شکل‌های هندسی مشخص، دو موضوع مهمی است که در هندسه تحلیلی درباره آن‌ها بحث می‌شوند.

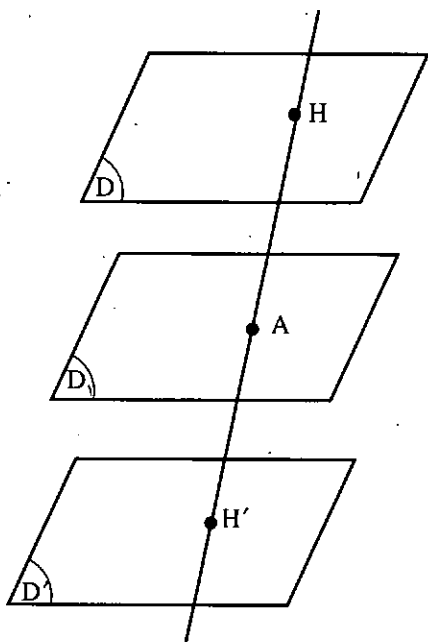
در این مقاله به موضوع صفحه نیمساز در فضا و یافتن معادله جبری آن می‌پردازیم و بحث خود را به این سه بخش تقسیم می‌کنیم.

هر یک آن از نقاط را تا دو صفحه D و D' به دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه های D_1 و D_2 در نظر بگیرید و فاصله آن ها را تا دو صفحه D و D' محاسبه کنید. به چه نتیجه ای می رسید؟

۲. صفحه نیمساز دو صفحه موازی

دو صفحه موازی به معادله های $D: ax + by + cz + d = 0$ و $D': ax + by + cz + d' = 0$ را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو صفحه به یک فاصله هستند، صفحه ای موازی با این دو صفحه است که درست در وسط دو صفحه موازی قرار دارد که آن را صفحه نیمساز دو صفحه موازی در نظر می گیریم. در این حالت معادله صفحه نیمساز برابر است با:

$$D_1: ax + by + cz + \frac{1}{2}(d + d') = 0 \quad (2)$$



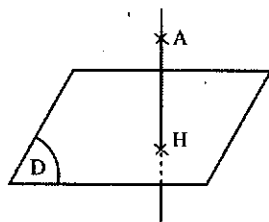
(شکل ۳)

فعالیت ۲

دو صفحه موازی به معادله های $D: ax + by + cz + d = 0$ و $D': ax + by + cz + d' = 0$ را در نظر بگیرید و به کمک رابطه (۱)، درستی رابطه (۲) را تحقیق کنید.

در هندسه تحلیلی پیش دانشگاهی به عنوان یک تمرین ثابت کرده اید که فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ تا صفحه D به معادله $ax + by + cz + d = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (1)$$



(شکل ۲)

اکنون به کمک رابطه (۱) و این که $AH = AH'$ خواهیم داشت:

$$AH = AH' \Rightarrow \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'z + d'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

که از این جا معادله های دو صفحه D_1 و D_2 (شکل ۱) یعنی صفحه های نیمساز به دست می آید.
مثال ۱. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه به معادله های زیر به یک فاصله باشند.

$$D: 4x - z + 1 = 0$$

$$D': 2x - 3y + 2z - 3 = 0$$

حل. دو صفحه D و D' متقاطع هستند و مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله باشند، همان صفحه های نیمساز فرجه های بین دو صفحه است.

$$\frac{|4x - z + 1|}{\sqrt{17}} = \frac{|2x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow 4x - z + 1 = \pm(2x - 3y + 2z - 3)$$

معادله های صفحه های نیمساز عبارتند از:

$$\begin{cases} D_1: 2x + 3y - 2z + 4 = 0 \\ D_2: 6x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

فعالیت ۱

در مثال قبل نقطه دلخواه A را روی صفحه D_1 و نقطه دلخواه B را روی صفحه D_2 در نظر بگیرید، سپس فاصله

مثال ۲. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که از دو صفحه بر معادله های زیر به یک فاصله باشد.

$$D: 3x - y + 2z - 1 = 0$$

$$D': -6x + 2y - 4z - 10 = 0$$

حل. دو صفحه با هم موازیند، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \vec{N} &= (3, -1, 2) \\ \vec{N}' &= (-6, 2, -4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{N}' = -2\vec{N}$$

مکان هندسی فوق، صفحه ای است موازی با D و D' به طوری که در وسط آن ها قرار دارد. برای یافتن معادله صفحه نیمساز ابتدا بردارهای نرمال دو صفحه D و D' را به یک صورت تبدیل کرده، سپس از رابطه (۲) استفاده می کنیم.

دو طرف معادله خط D' را بر -2 تقسیم می کنیم،

$$D': 3x - y + 2z + 5 = 0$$

با مقایسه معادله های دو خط D و D' و رابطه (۲) ملاحظه می کنیم که:

$$a = 3 \text{ و } b = -1 \text{ و } c = 2, d = -1 \text{ و } d' = 5$$

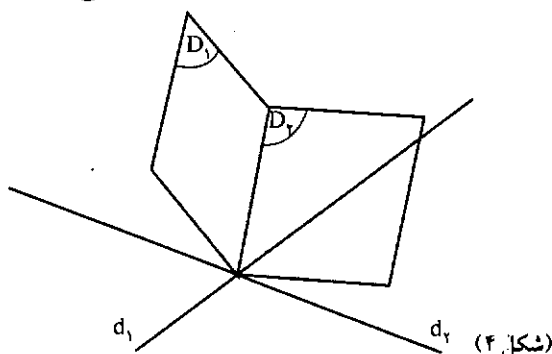
در نتیجه معادله صفحه نیمساز به صورت زیر است:

$$D_1: 3x - y + 2z + \frac{1}{2}(-1 + 5) = 0$$

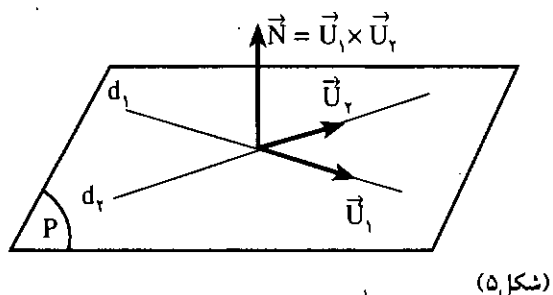
$$\Rightarrow D_1: 3x - y + 2z + 2 = 0$$

۳. صفحه نیمساز دو خط متقاطع در فضا

هرگاه d_1 و d_2 دو خط متقاطع در فضا باشند، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، دو صفحه متمایز D_1 و D_2 است (شکل ۴) که صفحه های نیمساز زاویه های داخلی و خارجی دو خط متقاطع هستند.



(شکل ۴)

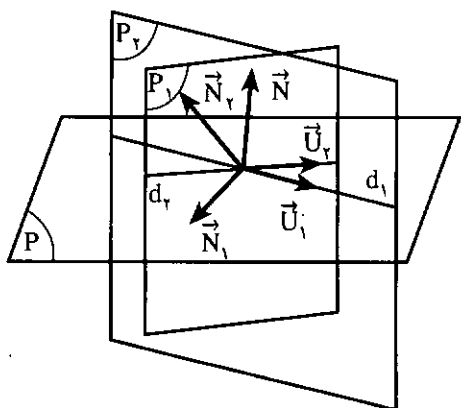


(شکل ۵)

سپس معادله های دو صفحه P_1 و P_2 را که به ترتیب شامل خط های d_1 و d_2 و بر صفحه P عمود هستند، محاسبه می کنیم. واضح است که d_1 و d_2 به ترتیب فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 با صفحه P هستند. اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه P_1 و P_2 باشند و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه P و $\vec{U}_1$ و $\vec{U}_2$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{N}_1 &\perp \vec{N} \\ \vec{N}_1 &\perp \vec{U}_1 \end{aligned} \right. \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N} \times \vec{U}_1$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{N}_2 &\perp \vec{N} \\ \vec{N}_2 &\perp \vec{U}_2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_2$$



(شکل ۶)

کنیم که شامل دو خط d_1 و d_2 هستند و بر صفحه P عمود می‌باشند، برای این منظور اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ بردارهای نرمال دو صفحه به ترتیب P_1 و P_2 باشند، داریم:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \perp \vec{U}_1 \\ \vec{N}_1 \perp \vec{N} \end{cases} \Rightarrow \vec{N}_1 = \vec{N} \times \vec{U}_1$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (0, 1, 1) \times (2, 1, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_1 = (-2, 2, -2) \parallel (-1, 1, -1)$$

$$\begin{cases} \vec{N}_2 \perp \vec{U}_2 \\ \vec{N}_2 \perp \vec{N} \end{cases} \Rightarrow \vec{N}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_2$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (0, 1, 1) \times (1, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{N}_2 = (4, 1, -1)$$

در این مرحله با نقطه دلخواه $B(2, -2, 2)$ روی خط d_1 و بردار نرمال $\vec{N}_1$ ، معادله صفحه P_1 و با نقطه دلخواه $A(1, 0, 0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}_2$ ، معادله صفحه P_2 را می‌نویسیم:

$$P_1: -x + y - z = -6$$

$$P_2: 4x + y - z = 4$$

هم‌اکنون با داشتن معادله دو صفحه P_1 و P_2 ، معادله‌های صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین این دو صفحه را می‌نویسیم که این صفحه‌ها یعنی P' و P'' ، همان صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند.

$$\frac{|-x + y - z + 6|}{\sqrt{3}} = \frac{|4x + y - z - 4|}{\sqrt{18}}$$

$$P': \sqrt{6}(-x + y - z + 6) = 4x + y - z - 4$$

$$\Rightarrow P': (-4 - \sqrt{6})x + (\sqrt{6} - 1)y + (1 - \sqrt{6})z + 10 = 0$$

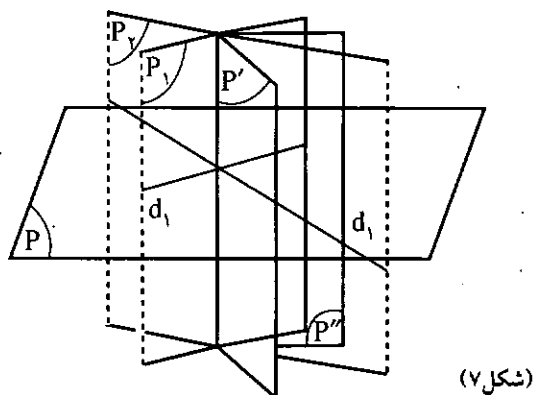
$$P'': \sqrt{6}(-x + y - z + 6) = -(4x + y - z - 4)$$

$$\Rightarrow P'': (4 - \sqrt{6})x + (1 + \sqrt{6})y - (\sqrt{6} + 1)z + 2 = 0$$

فعالیت ۳

در مثال قبل نقطه دلخواه A_1 را روی صفحه P' و نقطه دلخواه A_2 را روی صفحه P'' در نظر بگیرید، سپس فاصله

اکنون صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحه P_1 و P_2 همان صفحه‌های نیمساز دو خط متقاطع d_1 و d_2 است. در شکل (۷) دو صفحه P' و P'' صفحه‌های نیمساز دو خط d_1 و d_2 هستند



(شکل ۷)

مثال: مکان هندسی نقاطی را از فضای R^3 بیابید که از دو خط به معادله‌های زیر به یک فاصله باشند؟

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$$

ابتدا معادله صفحه P را به دست می‌آوریم که شامل دو خط متقاطع d_1 و d_2 است، برای این منظور بردار نرمال صفحه P را محاسبه می‌کنیم اگر $\vec{U}_1$ و $\vec{U}_2$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 و $\vec{N}$ بردار نرمال صفحه P باشند، داریم:

$$\begin{cases} \vec{N} \perp \vec{U}_1 \\ \vec{N} \perp \vec{U}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{N} = \vec{U}_1 \times \vec{U}_2$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (2, 1, -1) \times (1, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (0, -5, -5) \parallel (0, 1, 1)$$

اکنون با در نظر گرفتن نقطه دلخواه $A(1, 0, 0)$ روی خط d_2 و بردار نرمال $\vec{N}$ ، معادله صفحه P را می‌نویسیم:

$$P: 0(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow P: y + z = 0$$

در این مرحله باید معادله‌های دو صفحه P_1 و P_2 را پیدا

اکنون فرض کنیم $A(x, y, z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی نقاطی باشند که فاصله آن‌ها از دو خط موازی d_1 و d_2 برابر باشند، بنابراین طبق شکل (۸) داریم:

$$AH_1 = AH_2$$

اکنون برای محاسبه AH_1 یعنی فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از خط d_1 ، ابتدا نقطه دلخواه $A_0(1, -2, 0)$ را روی d_1 در نظر می‌گیریم، سپس به کمک رابطه (۳) داریم:

$$\vec{AA_0} = (x-1, y+2, z), \quad \vec{u} = (1, -2, -1)$$

$$AH_1 = \frac{|\vec{AA_0} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-y+2z-2, z+x-1, -2x-y)|}{\sqrt{6}}$$

همچنین برای محاسبه AH_2 ، یعنی فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از خط d_2 ، نقطه دلخواه $A_1(0, 1, -1)$ را روی d_2 در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\vec{AA_1} = (x, y-1, z+1), \quad \vec{u} = (1, -2, -1)$$

$$AH_2 = \frac{|\vec{AA_1} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-y+2z+3, z+x+1, -2x-y+1)|}{\sqrt{6}}$$

از آن‌جا که $AH_1 = AH_2$ و انجام عملیات جبری، معادله صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 به دست می‌آید:

$$P': 2y - 4z = 1$$

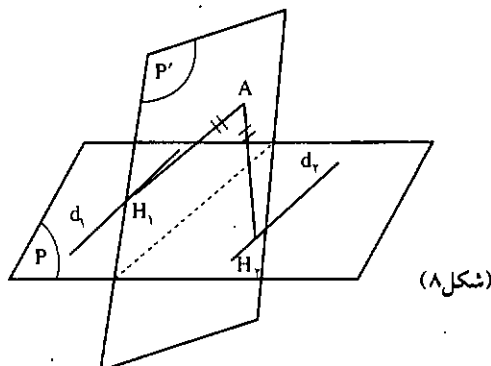
فعالیت ۴

نقطه‌ای دلخواه روی صفحه P' در مثال قبل در نظر بگیرید و فاصله این نقطه را با استفاده از رابطه (۳) تا دو خط موازی d_1 و d_2 به دست آورید، سپس نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه P' اختیار کنید و فاصله‌های آن‌ها را تا دو خط موازی d_1 و d_2 محاسبه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

هریک از نقاط را تا دو خط موازی d_1 و d_2 به دست آورید. نقاط دلخواه دیگری را روی صفحه‌های P' و P'' در نظر بگیرید و فاصله آن‌ها را تا دو خط موازی d_1 و d_2 محاسبه کنید، به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۴. صفحه نیمساز دو خط موازی

دو خط موازی d_1 و d_2 را در نظر بگیرید، مکان هندسی نقاطی از فضا که از این دو خط به یک فاصله باشند، صفحه‌ای است عمود بر صفحه P (صفحه شامل دو خط موازی d_1 و d_2) و درست در وسط دو خط موازی آن‌ها قرار دارد که به آن صفحه نیمساز دو خط موازی می‌گوییم. در شکل (۸) صفحه نیمساز دو خط موازی d_1 و d_2 یعنی صفحه P' ، رسم شده است.



مثال. مکان هندسی نقاطی از فضا را بیابید که فاصله آن‌ها تا دو خط به معادله‌های زیر برابر باشند؟

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

حل. یادآوری: در هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی آموخته‌ایم که برای محاسبه فاصله نقطه A از خط d ، ابتدا نقطه دلخواه A_0 را روی خط d در نظر می‌گیریم، سپس با فرض این که $\vec{A_0A}$ بردار هادی خط d باشد، رابطه زیر فاصله نقطه A را از خط d مشخص می‌کند:

$$D = \frac{|\vec{AA_0} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (۳)$$