

## در حاشیه مجموعه‌ها

حمیدرضا امیری

مورد استفاده دانش آموزان سال اول

اصولاً در هر نظریه از ریاضیات پس از بیان تعریفها و اصول حاکم بر آن، قضیه‌هایی طرح و اثبات می‌شوند و پس از اثبات به شکل ابزارهایی قوی درمی‌آیند که برای پیشبرد، رشد و تکامل آن نظریه مورد استفاده واقع شده و به خصوص در حل مسأله‌های مربوط به آن از تعریفها و قضیه‌های اثبات شده بهره‌گیری می‌گردد.

نظریه مجموعه‌ها که زمانی یکی از بحرانهای ریاضیات به شمار می‌رفت - و نیز امروزه از اصلی‌ترین و زیربنایی‌ترین شاخه‌ها و نظریه‌های ریاضیات است - از این قاعده مستثنی نمی‌باشد. در کتاب ریاضیات جدید سال اول پس از تعریف مجموعه<sup>۱</sup> و تعریفهای دیگر به دو مفهوم عضویت و جزئیت (زیر مجموعه بودن) برخورد می‌کنیم که به ترتیب برای نشان دادن عضو یک مجموعه یا تعلق به یک مجموعه داشتن از نماد  $(\in)$  و برای بیان زیر مجموعه یک مجموعه از نماد  $(\subset)$  استفاده شده است. ابتدا در حاشیه همین دو مفهوم اندکی تأمل می‌کنیم و تا حدودی به بررسی آنها می‌پردازیم:

قبل از آن این مسأله را روشن کنیم، که وقتی می‌گوییم «مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء دو به دو متمایز و مشخص» این اشیاء چه هستند و این بسیار مهم است، توجه کنید:

۱- مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء دو به دو متمایز و مشخص: (در حقیقت این گزاره تعبیری است برای مشخص کردن مجموعه، نه تعریف مجموعه)

اگر بحث ما راجع به عددها باشد هر عدد یک شی ریاضی است، اگر بحث ما دربارهٔ نجوم باشد هر ستاره یا سیاره یک شی است، اگر بحث مادر حاشیه مجموعه‌ها باشد هر مجموعه می‌تواند یک شی باشد....

بنابراین اعضای یک مجموعه می‌توانند خودشان مجموعه باشند و به چنین مجموعه‌ای؛ مجموعه مجموعه‌ها می‌گویند.

حال اگر  $A$  یک مجموعه دلخواه باشد و  $a$  عضوی از مجموعه  $A$ ، می‌نویسیم  $a \in A$  و این به شرطی است که شی  $a$  واقعاً به صورت یک عضو در  $A$  واقع باشد. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱- فرض کنیم

$$A = \{a, \{a, b\}, \{b\}, \{a, \{a\}\}\}$$

واضح است که مجموعه  $A$  دارای ۴ عضو است که زیر آنها خط کشیده شده است. گزاره  $a \in A$  درست،  $\{a\} \in A$  نادرست (زیرا شی  $\{a\}$  به صورت یک عضو از اعضای  $A$  در مجموعه  $A$  نیست)، گزاره  $\{b\} \in A$  درست، گزاره  $b \in A$  نادرست و گزاره  $\{a, \{a\}\} \in A$  درست می‌باشد.

مثال ۲- اگر  $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$  داریم:

$$a \in A, \{a\} \in A, \{\{a\}\} \in A$$

اما در مفهوم زیر مجموعه نیاز به دقت بیشتری دارد ما تعریف می‌کنیم «مجموعه  $A$  زیر مجموعه مجموعه  $B$  است اگر و تنها اگر

است بنا بر این اگر خود مجموعه و مجموعه تهی را زیر مجموعه‌های بدیهی بنامیم؛ هر مجموعه دارای  $(2^n - 2)$  زیر مجموعه غیر بدیهی است.

مثال ۵ - هر گاه تعداد زیر مجموعه‌های يك مجموعه  $(k+1)$  عضوی ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیر مجموعه‌های يك مجموعه  $(k+3)$  عضوی باشد، عدد طبیعی  $k$  را تعیین کنید.

$$2^{(k+1)} = \text{تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه } (k+1) \text{ عضوی}$$

$$2^{(k+3)} = \text{تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه } (k+3) \text{ عضوی}$$

$$\text{طبق فرض} \Rightarrow 2^{(k+1)} + 48 = 2^{(k+3)}$$

$$\Rightarrow 2^k \times 2 + 48 = 2^k \times 2^2$$

حال اگر فرض کنیم  $2^k = x$  خواهیم داشت:

$$2x + 48 = 4x \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow x = 8$$

$$2^k = x$$

$$\Rightarrow 2^k = 8 \Rightarrow 2^k = 2^3 \Rightarrow \boxed{k=3}$$

تعریف: مجموعه توانی مجموعه  $A$  را با  $P(A)$  نمایش می‌دهیم و آن مجموعه عبارت است از «مجموعه شامل همه زیر مجموعه‌های  $A$ ».

مثال ۶ - هر گاه  $A = \{2, 3, 4\}$ ،  $P(A)$  را معین کنید.

$$P(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset\}$$

مثال ۷ - هر گاه  $A$  يك مجموعه ۲ عضوی باشد معین کنید:

$$P(P(P(A)))$$

چند عضو دارد.

$$P(A) = 2^2 = 4 = \text{تعداد زیر مجموعه‌های } A = \text{تعداد اعضای } P(A)$$

$$P(P(A)) = \text{تعداد زیر مجموعه‌های } P(A) = \text{تعداد اعضای } P(P(A))$$

$$= 2^4 = 16$$

هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  نیز باشد» و یا باز بان ریاضی تعریف زیر مجموعه را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$[A \subseteq B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B]$$

وقتی نماد  $\subseteq$  را به جای  $\subset$  به کار می‌بریم مجموعه  $A$  می‌تواند مساوی با مجموعه  $B$  نیز باشد.

مثال ۳ - اگر فرض کنیم:

$$A = \{a, \{b, \{a\}\}, \{a, b\}, \{b\}\}$$

در این صورت:

$$\text{الف) } \{a\} \subset A \quad (\text{زیرا } a \in A \text{ و } a \in \{a\})$$

$$\text{ب) } \{a, \{b\}\} \subset A \quad (\text{زیرا } a \in A \text{ و نیز } \{b\} \in A)$$

$$\text{ج) } \{a, b\} \not\subset A \quad (\text{زیرا } a \in A \text{ ولی } b \notin A)$$

$$\text{د) } \{\{a, b\}, \{b\}\} \subset A \quad (\text{زیرا } \{b\} \in A \text{ و نیز } \{a, b\} \in A)$$

نکته: هر گاه مجموعه  $A$  دلخواه و دارای  $n$  عضو باشد  $(n = 0, 1, 2, \dots, k)$  در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه  $A$  عبارت است از  $2^n$ .

مثال ۴ - اگر مجموعه  $A$  دارای ۶۴ زیر مجموعه باشد، معین کنید که  $A$  چند عضو دارد؟

$$2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

پس مجموعه  $A$  دارای ۶ عضو است.

تذکر: با توجه به تعریف زیر مجموعه؛ واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش می‌باشد و نیز در کتاب ریاضیات جدید اول ثابت شده که مجموعه تهی  $\emptyset$  زیر مجموعه هر مجموعه

۱ - هر گاه علاوه بر اینکه  $A \subseteq B$ ،  $B \subseteq A$  نیز باشد در این صورت تعریف می‌کنیم  $A = B$ .

۲ - هر مجموعه که فاقد عضو باشد تهی می‌نامیم و به صورت تهی  $\emptyset$  یا  $\{\}$  آن را نمایش می‌دهیم.

و نیز در کتاب سال اول اثبات شده (به روش عضوگیری دلخواه)

$$A \cup A' = M \text{ که}$$

تعریف عمل اشتراك: اشتراك دو مجموعه  $A$  و  $B$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \cap B) = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

با استفاده از تعریف اشتراك واضح است که اگر عضوی در اشتراك دو مجموعه واقع شود در هر يك از آن دو مجموعه نیز می‌باشد و در حالت کلی «اشترك دو مجموعه زیر مجموعه هر يك از آن دو مجموعه است، مثلاً:  $A \cap B \subseteq A$  یا  $A \cap B \subseteq B$ »

قضیه اصلی اشتراك: هر گاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند و  $A \subseteq B$  در این صورت  $A \cap B = A$  و برعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیه اصلی اشتراك:

$$\text{الف) } A \subseteq A \Rightarrow A \cap A = A \quad \text{قضیه اصلی}$$

$$\text{ب) } \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{ج) } A \subseteq M \Rightarrow A \cap M = A$$

د) چون  $A$  و  $A'$  متمم مجموعه  $A$  است (جدا از هم می‌باشند پس  $A \cap A' = \emptyset$ ).

$$(1) - A' = \{x \in M | x \notin A\} \Rightarrow$$

$$(A')' = \{x \in M | x \notin A'\} = \{x \in M | x \in A\} = A$$

### خواص اعمال اجتماع و اشتراك

(در کلیه خواص زیر مجموعه‌های  $A$  و  $B$  و  $C$ ، مجموعه‌هایی دلخواه می‌باشند.)

$$1) \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases} \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

$$P(P(P(A))) = \text{تعداد اعضای } P(P(A)) = 2^{2^2} = 2^{2^2}$$

حال به بحث اصلی خود یعنی استفاده از قضیه‌های اثبات شده و قانونهای به اثبات رسیده در حل مسأله‌ها و با اثبات قانونهای دیگر باز می‌گردیم.

در نظریه مجموعه‌ها و بین مجموعه‌ها اعمالی چون اجتماع، اشتراك و تفاضل تعریف می‌کنیم که هر يك از این اعمال به نوبه خود دارای قضیه‌ها، خواص و ویژگیهایی می‌باشند که در این مقاله ابتدا به تعریف و معرفی بسیار مختصری از آن پرداخته و سپس به استفاده‌های بعضی از آنها در حل مسأله‌ها می‌پردازیم.

تعریف عمل اجتماع: هر گاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند اجتماع  $A$  و  $B$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A \cup B) = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in (A \cup B) \iff x \in A \vee x \in B$$

(تعریف کار بردی اجتماع)

از تعریف اجتماع واضح است که اگر عضوی در یکی از دو

مجموعه باشد در اجتماع آنها نیز می‌باشد و در حالت کلی «هر مجموعه، زیر مجموعه اجتماع خودش با هر مجموعه دیگر است. مثلاً  $A \subseteq (A \cup B)$ ».

قضیه اصلی اجتماع: هر گاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند و  $A \subseteq B$  در این صورت  $A \cup B = B$  و برعکس.

نتیجه‌های حاصل از قضیه اصلی اجتماع: ( $M$  مجموعه مرجع و  $\emptyset$  مجموعه تهی فرض شده است.)

$$\text{الف) } A \subseteq A \Rightarrow A \cup A = A \quad \text{قضیه اصلی}$$

$$\text{ب) } \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cup \emptyset = A \quad \text{قضیه اصلی}$$

$$\text{ج) } A \subseteq M \Rightarrow A \cup M = M \quad \text{قضیه اصلی}$$

شرکت پذیری

$$= [A \cap (B \cap B')] \cap A \\ = (A \cap \emptyset) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$$

ب) اگر تعداد مجموعه‌ها بیش از ۳ مجموعه باشد، مثلاً:  
۴ مجموعه داشته باشیم ابتدا دو مجموعه را يك مجموعه در نظر گرفته و در دو مجموعه دیگر توزیع می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} & \overbrace{(A \cap B)}^D \cap (A' \cup B) = \\ & \overbrace{[(A \cap B) \cap A']}^D \cup \overbrace{[(A \cap B) \cap B]}^D \\ & = [(B \cap A) \cap A'] \cup [A \cap (B \cap B)] \\ & = [B \cap (A \cap A')] \cup (A \cap B) \\ & = (B \cap \emptyset) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = (A \cap B) \end{aligned}$$

حال مثال قبل را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم:

$$(A \cap B) \cap (A' \cup B)$$

$$\stackrel{\text{جا بجایی}}{=} \overbrace{(A' \cup B)}^D \cap (A \cap B)$$

$$\stackrel{\text{شرکت پذیری}}{=} \overbrace{[(A' \cup B) \cap A]}^D \cap B$$

$$\stackrel{\text{بخشی}}{=} [(A' \cap A) \cup (B \cap A)] \cap B$$

$$\stackrel{\text{جا بجایی}}{=} [\emptyset \cup (A \cap B)] \cap B = (A \cap B) \cap B$$

$$\stackrel{\text{شرکت پذیری}}{=} A \cap (B \cap B) = A \cap B$$

$$۴) \begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

خاصیت متمم گیری (قوانین دمورگان)

$$۲) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$$

خاصیت شرکت پذیری

در استفاده از خاصیت شرکت پذیری به نکات زیر توجه می‌کنیم:  
الف) در استفاده از این خاصیت، ترتیب قرار گرفتن مجموعه‌ها حفظ شده و جایابی صورت نمی‌گیرد.

ب) زمانی از شرکت پذیری استفاده می‌شود که اعمال بین ۳ مجموعه همگی اجتماع یا اشتراك باشد.

ج) شرکت پذیری برای ۳ مجموعه امکان پذیر است و اگر تعداد مجموعه‌ها بیش از ۳ مجموعه باشد، مثلاً اگر ۴ مجموعه باشند باید ۲ مجموعه را يك مجموعه فرض کرده و با دو مجموعه دیگر شرکت پذیری را به کار ببریم به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} & \overbrace{(A \cup B)'}^D \cup (B \cap C) = \overbrace{[(A \cup B)'] \cup B}^D \cap C \\ & = [A \cup (B' \cup B)] \cap C \\ & = (A \cup M) \cap C = M \cap C = M \end{aligned}$$

$$۳) \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

خاصیت توزیع پذیری یا بخشی

در استفاده از خاصیت بخشی به نکات زیر توجه می‌کنیم:

الف) در خاصیت بخشی همواره از دو عمل استفاده می‌شود، یا يك مجموعه با عمل اجتماع در اشتراك دو مجموعه توزیع می‌شود و یا يك مجموعه با عمل اشتراك در اجتماع دو مجموعه توزیع می‌شود و ما حق توزیع اشتراك در اشتراك یا اجتماع در اجتماع را نداریم. به مثال زیر توجه کنید:

$$(A \cap B) \cap (A \cap B') \stackrel{\text{جا بجایی}}{=} (A \cap B) \cap (B' \cap A)$$

$$\stackrel{\text{شرکت پذیری}}{=} [(A \cap B) \cap B'] \cap A$$

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= \overbrace{(A \cup \emptyset)}^A \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = \underline{A} \end{aligned}$$

تعریف عمل تفاضل: هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند،  $(A - B)$  مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A - B) = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

بنابراین:

$$x \in (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin B$$

با توجه به تعریف تفاضل به راحتی می‌توان ثابت کرد که،

$$(A - B) = (A \cap B')$$

$$\text{زیرا: } [x \in (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin B]$$

$$\iff x \in A \wedge x \in B' \iff x \in (A \cap B')$$

$$\iff (A - B) = (A \cap B')$$

اکنون با توجه به تعریف‌های اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل و بیان قضیه‌ها و خواص مربوط به آنها، می‌توانیم از این قضیه‌ها و خواص به عنوان ابزارهایی در حل مسأله‌ها استفاده کنیم، که البته روش‌های به کار گرفته شده در زیر منحصراً به فرد نمی‌باشند.

**مسأله ۱)** ثابت کنید هرگاه  $A \subseteq B$  آنگاه:

$$(A - B) = \emptyset$$

ثابت می‌کنیم که دو مجموعه  $A$  و  $B'$  با توجه به فرض، مجموعه‌هایی جدا از هم هستند.

$$A \subseteq B$$

$$(x \in A \implies x \in B \implies x \notin B')$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{(A - B)}^{(A \cap B')} \\ &\implies A \cap B' = \emptyset \implies (A - B) = \emptyset \end{aligned}$$

**مسأله ۲)** ثابت کنید هرگاه  $(A - B) = (B - A)$

آنگاه  $A = B$

تذکره ۱) با توجه به قوانین دمورگان همواره می‌توان اجتماع را به اشتراک تبدیل کرد و برعکس، به مثالهای زیر توجه کنید:

$$۱) (A' \cap B') = (A \cup B)'$$

$$\begin{aligned} ۲) [(A \cup B') \cup (A' \cap B)]' \\ = [\underbrace{(A \cup B')}_D \cup \underbrace{(A' \cap B)}_{D'}]' = M' = \emptyset \end{aligned}$$

تذکره ۲) قوانین دمورگان قابل تعمیم است.

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = (\bigcup_{i=1}^n A_i)'$$

$$= (A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n') = \bigcap_{i=1}^n A_i'$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = (\bigcap_{i=1}^n A_i)'$$

$$= (A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n') = \bigcup_{i=1}^n A_i'$$

$$۵) \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases} \quad \text{قوانین جذب}$$

اثبات) روش اول:

$$\rightarrow (A \cap B) \subseteq A$$

قضیه اصلی اجتماع

$$\implies A \cup (A \cap B) = A$$

$$\rightarrow A \subseteq (A \cup B)$$

قضیه اصلی اشتراک

$$\implies A \cap (A \cup B) = A$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= \overbrace{(A \cap M)}^A \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (M \cup B) = A \cap M = \underline{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap A &= \overbrace{(A \cup B) \cap A}^{\text{جذب}} \\ &\Rightarrow (A \cap B) = A \xRightarrow{\text{قضیه اصل اشتراک}} A \subseteq B \quad (۱) \end{aligned}$$

از طرفی چون طبق فرض  $(A \cap B) = (A \cup B)$  پس:

$$(A \cup B) = A \Rightarrow B \subseteq A \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود که:  $A = B$ .

مسئله ۶ ثابت کنید هرگاه  $A \cap B = M$  آنگاه:

$$B = M \text{ و } A = M$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) = M &\Rightarrow \overbrace{(A \cap B) \cup A}^{\text{جذب}} = (M \cup A) \\ &\Rightarrow A = M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \cap B) = M &\Rightarrow \overbrace{(A \cap B) \cup B}^{\text{جذب}} \\ &= (M \cup B) \Rightarrow B = M \end{aligned}$$

تمرین: ثابت کنید هرگاه  $(A \cup B) = \emptyset$  آنگاه:

$$B = \emptyset \text{ و } A = \emptyset$$

(اثبات به عهده خواننده)

مسئله ۷ ثابت کنید هرگاه:

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases}$$

آنگاه  $B = C$ .

$$\overbrace{B}^{\text{جذب}} = B \cap (A \cup B)$$

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{\text{طبق فرض}} \xRightarrow{\text{بخشی و جابجایی}} B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{\text{طبق فرض}} (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - B) = (B - A) &\Rightarrow (A \cap B') = (B \cap A') \\ &\Rightarrow \overbrace{(A \cap B') \cup A}^{\text{جذب}} = \overbrace{(B \cap A') \cup A}^{\text{جذب}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = A \cup B$$

$$\xRightarrow{\text{عکس قضیه اصلی}} B \subseteq A \quad (۱)$$

$$(A \cap B') = (B \cap A')$$

$$\Rightarrow B \cup \underbrace{(A \cap B')}_{\text{جذب}} = B \cup \underbrace{(B \cap A')}_{\text{جذب}}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) = B \xRightarrow{\text{عکس قضیه اصلی}} A \subseteq B \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که:  $A = B$

مسئله ۳ ثابت کنید هرگاه  $(A - B) = A$  آنگاه:

$$(B - A) = B$$

$$\begin{aligned} (B - A) &= B - \overbrace{(A - B)}^A \\ &= B - (A \cap B') = B \cap (A \cap B')' \\ &= B \cap \underbrace{(A' \cup B)}_{\text{جذب}} = B \end{aligned}$$

مسئله ۴ ثابت کنید هرگاه  $(A - B) = \emptyset$  آنگاه  $A \subseteq B$  (عکس مسئله ۱)

$$(A - B) = \emptyset \Rightarrow (A \cap B') = \emptyset$$

$$\Rightarrow (A \cap B') \cup B = \emptyset \cup B$$

$$\Rightarrow (A \cup B) = B \Rightarrow A \subseteq B$$

مسئله ۵ ثابت کنید هرگاه  $(A \cap B) = (A \cup B)$  آنگاه  $A = B$

ثابت می کنیم  $A \cap B = A$

$$(A \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow$$

مسئله ۱۱) هرگاه  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$ ، ثابت کنید:

$$\begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$$

و سپس با استفاده از این مسئله ثابت کنید:

الف) اگر  $A \subseteq X$  و  $A' \subseteq X$  آنگاه  $X = M$ .

ب) اگر  $X \subseteq A$  و  $X \subseteq A'$  آنگاه  $X = \emptyset$ .

حل: فرض کنیم  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$ ، روابط بالا را از طریق عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم:

$$x \in (A \cup C) \xRightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x \in A \vee x \in C$$

$$\xRightarrow{\text{طبق فرض}} x \in B \vee x \in D \xRightarrow{\text{تعریف اجتماع}} x \in (B \cup D)$$

$$\Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$

و به همین طریق ثابت می‌شود:

$$(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

حال به اثبات الف و ب می‌پردازیم.

حل الف) داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cup A') \subseteq (X \cup X)$$

$$\Rightarrow M \subseteq X \quad (۱)$$

و با توجه به تعریف مجموعه مرجع می‌دانیم که:

$$X \subseteq M \quad (۲)$$

و با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو

مجموعه، نتیجه می‌گیریم که:  $X = M$ .

حل ب) داریم:

جذب

$$\text{طبق فرض} \quad \overbrace{(A \cup C) \cap C}^{\text{جذب}} = C$$

مسئله ۸) ثابت کنید اشتراک از چپ روی تفاضل توزیع پذیر است یعنی:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\text{سمت راست} = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$$

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$

$$\xRightarrow{\text{جابجایی}} = (A' \cup C') \cap (A \cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{شرکت پذیری}} = [(A' \cup C') \cap A] \cap B = (C' \cap A) \cap B$$

$$\xRightarrow{\text{جابجایی}} = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C) = \text{سمت چپ}$$

تمرین: ثابت کنید تفاضل از راست بر اشتراک توزیع پذیر است یعنی:

$$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

(اثبات به عهده خواننده)

مسئله ۹) ثابت کنید تفاضل از راست بر اجتماع توزیع پذیر است یعنی:

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$$

$$= (A \cap C') \cup (B \cap C') = (A - C) \cup (B - C)$$

مسئله ۱۰) ثابت کنید که هرگاه  $A \subseteq B \subseteq C$  آنگاه:

$$(A \cup B) = (B \cap C)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{قضیه اصلی اجتماع} \\ A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) = B \\ \text{قضیه اصلی اشتراک} \\ B \subseteq C \Rightarrow (B \cap C) = B \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(A \cup B) = (B \cap C)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) و تعریف تساوی بین دو مجموعه، نتیجه می‌گیریم که  $X = \emptyset$ .

درخاتمه متذکر می‌شوم که در این مقاله سعی شد از روش عضوگیری دلخواه، برای اثبات تساوی بین مجموعه‌ها، کمتر استفاده شود و بیشتر قوانین و قضیه‌های بیان شده، به کار گرفته شدند. توفیق شما را از خداوند متعال خواستارم.

$$\left\{ \begin{array}{l} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{array} \right\} \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (A \cap A')$$

$$\Rightarrow X \subseteq \emptyset \quad (۱)$$

و با توجه به اینکه همواره تهی زیر مجموعه هر مجموعه است داریم:

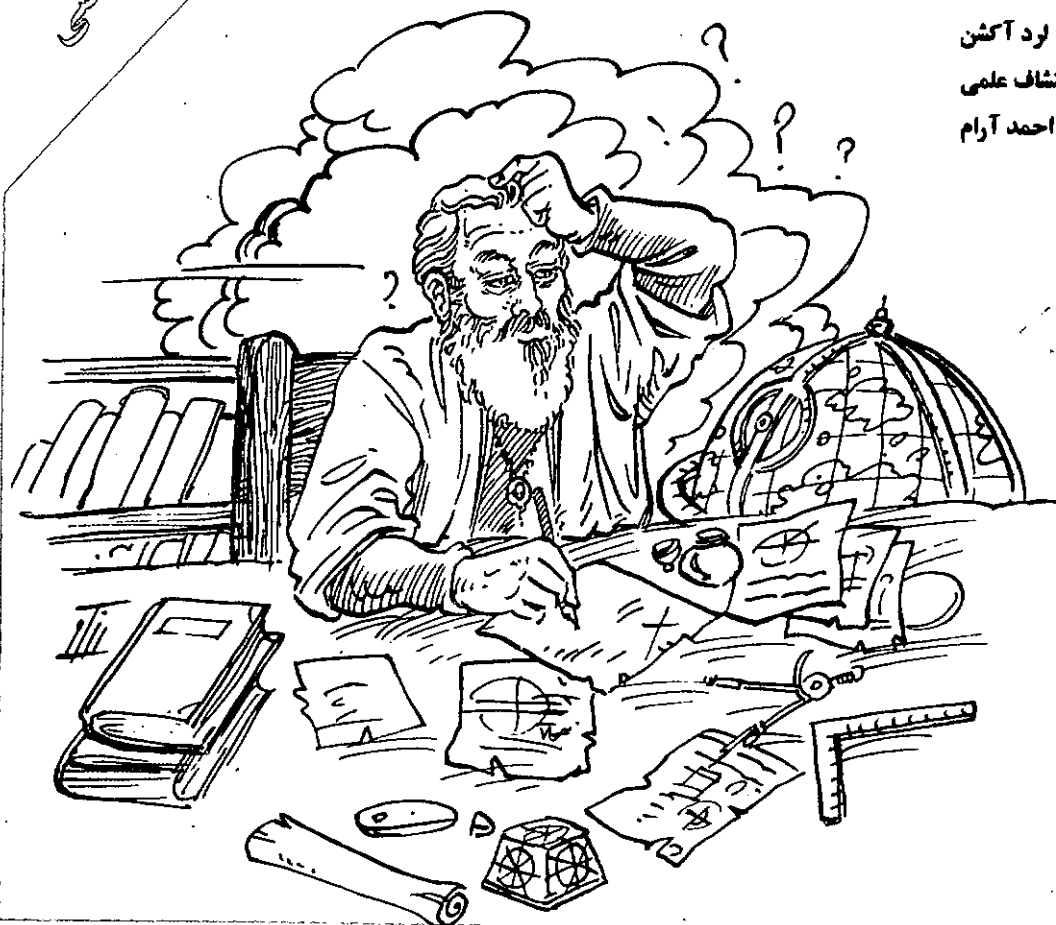
$$\emptyset \subseteq X \quad (۲)$$

هیچ چیز برای مرد علم ضرورتر از تاریخ آن و منطق اکتشاف نیست ... راه کشف کردن خطا، به کاربردن فرضیه و تخیل و روش آزمودن.

لرد آکشن

منطق اکتشاف علمی

کارل ریچموند پوپر ترجمه احمد آرام



ادب ریاضی