



نمادهای ریاضی و اتحادها

در شماره قبل درباره تاریخچه اتحاد دو معادله و برخی اتحادها بحث کردیم. در ادامه مطلب چند نکته دیگر درباره اتحادها را مرور کرده ایم.

باشد:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

بسیاری می گویند: «اتحاد یک جمله مشترک» درست است دو عبارتی که در هم ضرب شده اند، یک جمله مشترک (x) دارند؛ ولی توجه کنیم، این دو عبارتی که یک جمله مشترک دارند، تشکیل اتحاد نمی دهند، اتحاد به معنای یک برابری است و در عبارت «اتحاد یک جمله مشترک» نمی توان به این برابری پی برد. برای نمونه، خیلی وقت ها پیش می آید که از کسی پرسیده می شود: « $a^2 - b^2$ را تعریف کن» و او، بی هیچ تردیدی، پاسخ می دهد؛ این یک اتحاد مزدوج است. در دو جمله ای $a^2 - b^2$ هیچ برابری دیده نمی شود، در حالی که شرط نخست اتحاد، وجود یک برابری است. دوم، در کجای این عبارت، «مزدوج» را می بینید؟ برای «مزدوج» هم باید عبارت داشت که یک جمله آن ها با هم برابر و جمله

درباره اتحادها، باید به چند نکته اشاره کنیم. معمول است که در دبیرستان به چند اتحاد مهم، برای ساده کردن ضرب ها اشاره می شود. برخی عادت دارند اتحادها را به همان ردیفی که در کتاب درسی آمده اند، شماره گذاری کنند و برای نمونه، وقتی از اتحاد:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

گفت و گو می شود، بگویند «اتحاد سوم». در کتاب درسی ممکن است ردیف اتحادهایی که آورده اند، با هم فرق داشته باشند. «اتحاد سوم» هیچ معنایی ندارد، باید گفت، اتحادی است که حاصل ضرب دو عبارت مزدوج را به صورت تفاضل مربع های دو عبارت می دهد یا چیزی شبیه آن، که مضمون اتحاد را برساند. در واقع، تعداد اتحادها، بی نهایت است و به عنوان مثال، می توان از اتحاد عددی $5=5$ یا کلی از آن $a=a$ صحبت کرد. یا فرض کنید، این اتحاد مورد نظر

دیگر قرینه هم باشند. پس این عبارت، نه اتحاد است و نه مزدوج. خیلی ساده می توان گفت: « $a^2 - b^2$ یک عبارت جبری است» یا دقیق تر از آن، «تفاضل دو مجذور کامل است». اگر بخواهیم واژه اتحاد را به میان آوریم، می توان گفت: «این عبارت قابل تبدیل به صورت ضرب دو عبارت مزدوج هم است.» در ریاضیات، جمله ای را کامل می گویم که از دید رضیات معنا داشته باشد و نتوان از جمله ای که به نام «تعریف» می آوریم، مفهوم دیگری استنباط کرد. برای مثال، «وقت طلاست»، ولی نه به آن اندازه که جمله مابی معنا باشد. تعریف باید «لازم و کافی» باشد؛ و آنچه منظور ماست، از تعریف بیرون نیاید و در ضمن، به طور کامل، مفهوم مورد نظر ما را برساند.

این گونه رمزگونه صحبت کردن، کار ریاضیات نیست. برای نمونه، وقتی از معادله ای صحبت می کنید، نگوید «معلوم و مجهول می کنیم»، این جمله هیچ معنایی ندارد، بگوید: «جمله های معلوم را به یک طرف معادله و جمله های مجهول را به طرف دیگر معادله می بریم.»

وقتی از خارج قسمت دو کسر گفت و گو می کنید، از جمله معنایی (یا دست کم غیر ریاضی) «دور در دور، نزدیک در نزدیک» استفاده نکنید، معنای ریاضی جمله خود را بیان کنید: «برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر، بخشایب را به طور وارون در بخشی ضرب می کنیم». اگر دو کسر با هم برابرند، نگوید: «طرفین، وسطین می کنیم»، بگوید: «از ویژگی تناسب استفاده می کنیم» یا «دو طرف برابری را در حاصل ضرب مخرج ها، ضرب می کنیم».

راه اثبات اتحاد بودن: می خواهیم درستی این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$$

درستی این اتحاد را از راه های متفاوت می توان تحقیق

کرد:

راه اول: اگر در سمت چپ برابری، عمل ضرب را انجام دهیم، به سمت راست می رسم (خودتان ضرب را انجام دهید).

راه دوم: اگر سمت راست برابری را بر $a+b+c$ تقسیم کنیم، پرانتز دوم سمت چپ برابری به دست می آید. این تقسیم را انجام می هیم؛ ابتدا باید بخشی (مقسوم) و بخشایب (مقسوم علیه) را بر حسب توان های نزولی یکی از حرف ها، و از جمله a منظم می کنیم:

$$a^2 + 0a^2 - 3bca + (b^2 + c^2) = \text{بخشی}$$

$$= a + (b+c) \text{ بخشایب}$$

در بخشی جمله a^2 را برای مرتب بودن توان های a و پیش گیری از اشتباه افزوده ایم. از تقسیم a^3 بر a ، نخستین جمله خارج قسمت، یعنی a^2 به دست می آید. از ضرب a^2 در دو جمله بخشایب $(b+c)$ را یک جمله به حساب آورده ایم، به همین مناسبت آن را داخل پرانتز نوشته ایم، نتیجه می شود:

$$a^2 + (b+c)a^2$$

که اگر آن را از بخشی کم کنیم، باقی مانده اول به دست می آید:

$$- (b+c)a^2 - 3bca + b^2 + c^2$$

از تقسیم $a^2(b+c)$ بر a ، دومین جمله خارج قسمت، یعنی $a(b+c)$ پیدا می شود، که از ضرب آن در بخشایب پیدا می شود:

$$- (b+c)a^2 - (b+c)^2 a$$

آن را از مانده اول کم می کنیم، به دست می آید:

$$(b^2 + c^2 - bc)a + b^2 + c^2$$

از تقسیم نخستین جمله باقی مانده دوم بر a به دست می آید:

$$b^2 + c^2 - bc$$

که جمله سوم خارج قسمت است. آن را در بخش‌یاب ضرب می‌کنیم:

$$(b^2 + c^2 - bc)a + (b^2 + c^2 - bc)(b + c)$$

یا اگر پرانتزهای آخر را در هم ضرب کنیم:

$$(b^2 + c^2 - bc)a + b^2 + c^2$$

جمله سوم خارج قسمت برابر $(b^2 + c^2 - bc)$ می‌شود، که اگر حاصل ضرب آن را بر بخش‌یاب، از باقی مانده دوم کم کنیم، باقی مانده‌ای برابر صفر به دست می‌آید. بنابراین تقسیم بدون باقی مانده است:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

و به این ترتیب، درستی اتحاد ثابت شد.

راه سوم: اگر a را در این برابری مجهول بگیریم، معادله‌ای از درجه سوم به دست می‌آید. هر معادله درجه n حداکثر دارای n ریشه حقیقی است و اگر معادله‌ای بیش‌تر درجه خود ریشه داشت، دیگر معادله نیست، بکله اتحاد است. می‌توان آزمایش کرد که این برابری برای $a = 0$ ، $a = -b$ ، $a = -c$ و $a = -b - c$ برقرار است. وقتی معادله درجه سوم، دارای چهار ریشه حقیقی باشد، اتحاد است.

استفاده از ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها

معادله، هسته مرکزی و مضمون اصلی جبر مقدماتی را تشکیل می‌دهد. واژه «جبر» با توجه به همین مضمون انتخاب شده است. در تاریخ ریاضیات، محمد فرزند موسا مشهور به خوارزمی، ریاضی‌دان ایرانی سده سوم هجری را به وجود آورنده جبر می‌دانند. این ریاضی‌دان، در دوره ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و برای حل مسأله‌هایی که ناشی از تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت‌ها بود، در «حساب»

روش تازه‌ای آورد و آن را «جبر و مقابله» نامید. او «جبر» را به معنای «جبران کردن» و انتقال از یک سمت معادله به سمت دیگر می‌دانست (عملی که در واقع، موجب مثبت شدن عدد منفی می‌شود) و «مقابله» را به معنای «مقابل قرار دادن» در سمت معادله می‌دانست. اروپائیان واژه «جبر» را به صورت الجبر نگه داشتند و واژه «مقابله» را حذف کردند.

درباره معادله و ویژگی آن، بعد از این صحبت خواهیم کرد و در این جا تنها به کاربرد ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها می‌پردازیم.

نمونه اول: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$$

حل: البته می‌توان درستی این اتحاد را، با تحمل اندکی محاسبه‌های طولانی، با جمع سه کسر سمت چپ و ساده کردن آن، ثابت کرد؛ ولی ساده‌ترین راه این است که از برهان خلف استفاده کنیم. اگر این برابری یک معادله باشد (ونه اتحاد)، به دلیل درجه دوم بودن آن نسبت به x ، باید حداکثر دو ریشه حقیقی داشته باشد؛ در حالی که به سادگی می‌توان تحقیق کرد، اگر به جای x ، مقدارهای a ، b و c را قرار دهیم، در برابری صدق می‌کنند. یک معادله درجه دوم، نمی‌تواند ریشه حقیقی داشته باشد. البته در این میان، a ، b و c را برابر نمی‌گیریم و مخالف صفر فرض می‌کنیم.

برای نمونه، برای $x = a$ ، در سمت چپ برابری، کسر اول برابر a^2 و دو کسر دیگر برابر صفر می‌شوند، سمت راست برابری برابر a^2 می‌شود؛ یعنی $x = a$ ریشه‌ای از این معادله است. به همین ترتیب، برای $x = b$ و $x = c$ هم می‌توان آزمایش کرد. اکنون معادله درجه دوم ما دارای سه جواب می‌شود، بنابراین معادله نیست، یک اتحاد است.

نمونه دوم: می‌خواهیم درباره درستی این اتحاد تحقیق کنیم:

می‌شود؛ یعنی این، یک اتحاد است.
یک نمونه دیگر (اتحاد مثلثاتی). درستی این برابری را ثابت کنید.

$$\tan \sum_{k=1}^{n+1} \arctan \frac{k^2 + k + 2}{k^2 + k} = n + 2$$

حل: به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \arctan \frac{k^2 + k + 2}{k^2 + k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\arctan 1 + \arctan \frac{1}{k^2 + k + 2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} (\arctan(k+1) + \arctan k) \\ &= \frac{\pi}{4} (n+1) + \arctan(n+2) - \arctan 1 \\ &= \frac{\pi}{4} (n+1) + \arctan \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \tan \sum_{k=1}^{n+1} \arctan \frac{k^2 + k + 2}{k^2 + k} &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1 + \frac{n+1}{n+2}}{1 - \frac{n+1}{n+2}} = n + 2 \end{aligned}$$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

حل: در این جا باید a, b, c طوری باشند که هیچ دو تایی از آن‌ها با هم برابر صفر نشوند. برابری برای $x = a$ ، $x = b$ و $x = c$ برقرار است، بنابراین نمی‌تواند معادله باشد؛ زیرا اگر معادله باشد، به دلیل درجه دوم بودن آن، نباید بیش از دو ریشه حقیقی داشته باشد.

نمونه سوم: چرا این برابری، یک اتحاد است؟

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

به شرط این که از سه عدد a, b, c هیچ دو تایی قرینه هم نباشند.

حل: عبارت سمت چپ برابری را می‌توان این طور نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} (a-b)(a+c)(b+c) + \\ &(a+c)(a+b)(b-c) + (a+b)(c-a)(b+c) + \\ &(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه، نسبت به a ، از درجه دوم است؛ ولی برای $a = b$ و $a = c$ و $a = 0$ برابر صفر می‌شود؛ در نتیجه عبارت مفروض، متحد با صفر است.

نمونه چهارم: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 - ab}{(c+a)(c+b)} = 0$$

راهنمایی. شبیه تمرین قبل عمل کنید. بعد از مخرج مشترک گرفتن، عبارت صورت کسر نسبت به a ، از درجه دوم است و برای $a = 0$ و $a = c$ ، $a = -b$ برابر صفر

فکری و منطقی

جواب مسأله ۱: B: رئیس
J: تحول‌انداز
S: صندوقدار

جواب مسأله ۲: C: نجار
D: نقاش
F: لوله کش