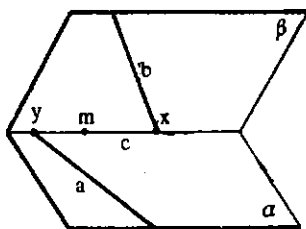


دربارهٔ مسأله‌های ساختمانی

در هندسهٔ فضایی

● پرویز شهریاری

شکل ۱



چون M روی خط راست c ($M \in c$) و c فصل مشترک دو صفحهٔ α و β ($c = \alpha \cap \beta$) است، پس نقطهٔ M به هر دو صفحهٔ α و β تعلق دارد ($M \in \alpha$ و $M \in \beta$). بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم: $c = \alpha \cap \beta$ که در آن $a = (M, a)$ و $b = (M, b)$ روی شکل ۱، خط راست مجهول c ، خطهای راست a و b را، به ترتیب، در نقطه‌های X و Y قطع کرده است.

آیا مسأله یک جواب دارد؟ آیا ممکن است، مسأله جواب نداشته باشد؟

خط راست مجهول، روی دو صفحهٔ α و β است (ولی از این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها از همین راه و به کمک صفحه‌های α و β به دست می‌آید؛ خواهید دید روش دیگری هم برای پیدا کردن خط راست c وجود دارد). این، به معنای آن است که هر خط راستی که غیر از فصل مشترک دو صفحهٔ α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند، زیرا خطهای راست a و b متافرنده و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این، $M \in \alpha \cap \beta$ ؛ یعنی $\alpha \cap \beta$ خط راست مورد نظر است. از این جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد.

برای حل مسأله‌های هندسهٔ فضایی، باید قبل از هر چیز، از دو مانع عبور کرد: (۱) تجسم فضایی جسم؛ (۲) رسم آن روی صفحه. بدون گذشتن از این دو مانع، حتی نمی‌توان حل مسأله را آغاز کرد. برای رسیدن به این هدف، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم و تمرین مستمر، باید به سرچشمهٔ مسأله مراجعه کرد. بیشتر مسأله‌های هندسهٔ فضایی، دربارهٔ چندوجهی‌هاست، ولی اگر بتوانیم صورت مسأله را بخوبی تجزیه و تحلیل کنیم، چه بسا به مسألهٔ ساده‌ای برسیم که هم تجسم آن و هم رسم آن روی صفحه (و در نتیجه، حل آن) ساده باشد. البته، که عکس این روش هم گاهی می‌تواند کارساز باشد؛ یعنی نقطه‌ها خطهای راست و صفحه‌هایی را که در فضا، و به ظاهر بی‌ارتباط با هم مطرح کرده‌اند، به یک چندوجهی ساده (مثل چهاروجهی، مکعب مستطیل و غیره) مربوط کنیم تا بستگی آنها با یکدیگر، برایمان روشنتر شود.

در این مقاله، مسأله‌ای ساده را، که در بیشتر کتابهای درسی وجود دارد، حل می‌کنیم و سپس، همین مسأله را، وقتی روی چندوجهیها داده شده است، دنبال می‌کنیم. خواهید دید، هم مسألهٔ اصلی می‌تواند به حل مسأله‌های مربوط به چند وجهیها کمک کند و هم مسأله‌های نوع دوم، ماهیت مسألهٔ اصلی را روشنتر می‌کنند.

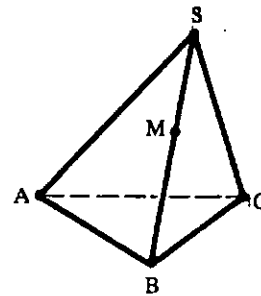
مسألهٔ اصلی: از نقطهٔ مفروض M ، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متافرنه و مفروض a و b را قطع کند. نقطهٔ M ، متعلق به هیچ کدام از خطهای راست a و b نیست.

حل. c را خط راست مجهول می‌گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می‌گذرد α ، و صفحه‌ای را که از خطهای راست b و c می‌گذرد β می‌نامیم.

ممکن است، یکی از دو خط راست a یا b ، موازی خط راست c درآید که در این صورت، مسأله جواب ندارد.

شاید تجسم فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید براحتی بستگی متقابل خطهای راست a ، b و c را با صفحههای α و β در ذهن خود تصور کنید. در این صورت می توانید برای خودتان یک مدل مقوایی بسازید و یا نقطه M و خطهای راست a و b را مثلاً روی یک چهاروجهی (مثل چهاروجهی $SABC$ ؛ شکل ۲) در نظر بگیرید. باید خط راستی پیدا کنیم که از نقطه M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که نسبت به هم متافرنند) قطع کند.

شکل ۲



به سادگی می توان متوجه شد که SB همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم: خط راست SB فصل مشترک دو صفحه SAB و SBC است؛ یعنی (SB) فصل مشترک دو صفحه α و β است (α از نقطه M و خط راست SA و β از نقطه M و خط راست BC گذشته است).

وقتی راه حل مسأله را بررسی می کنید، پاسخ دادن به این پرسشها، اهمیت جدی دارد:

(۱) از کجا نتیجه می شود: مسأله بیش از یک جواب ندارد؟

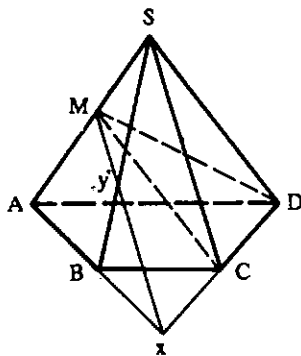
(۲) با چه شرطی مسأله جواب دارد؟

(۳) با آن که خط راست c به عنوان فصل مشترک دو صفحه α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

(۴) آیا ممکن است، بافروض بودن نقطه M و خطهای راست a و b ، مسأله جواب نداشته باشد؟ اکنون، همین مسأله را، به صورتهای دیگری و روی چند وجهیها، مطرح و حل می کنیم.

مسأله ۱: هرم $SABCD$ و نقطه M روی یال SA داده شده است، از نقطه M خط راستی بگذرانید که خطهای راست متناظر SB و CD را قطع کند.

شکل ۳



حل: همان طور که در حل مسأله اصلی دیدیم، خط راست مجهول، تنها می تواند فصل مشترک دو صفحه $(MSB) = \alpha$ ، $(MCD) = \beta$ باشد. برای به دست آوردن این خط راست کافی است نقطه برخورد خط راست CD را با صفحه α پیدا کنیم (شکل ۳). ساختمان، به این ترتیب انجام می شود:

در این صورت MX خط راست مورد نظر است.
 $(AB) \cap (CD) = X$; $X = (CD) \cap (MSB)$;

این مسأله، راه حل دیگری از مسأله اصلی را به ما تلقین می کند.
 فرض کنید صفحه α از نقطه M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحه α را در X قطع کند. در این صورت (MX) خط راست مجهول است، به شرطی که

$$(MX) \cap a \neq \emptyset$$

روی شکل ۱: $(MX) \cap a = Y$.

برای این که نقطه X را پیدا کنیم، کافی است صفحه دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحه α و γ باشد، آن وقت $X = b \cap d$. و در مسأله ۱:

$$a = (SB) ; b = (CD) ; \alpha = (MSB) ; \gamma = (ABCD) ; d = (AB)$$

به دو نتیجه ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسأله اصلی است توجه کنیم:

(۱) اگر مسأله اصلی جواب داشته باشد، آن وقت $c = \alpha \cap \beta$ خط راست مجهول است.

(۲) اگر مسأله جواب داشته باشد، آن وقت $(MX) = C$ ، جواب مسأله است که در آن $X = b \cap d$.

این دو نتیجه متناقض نیستند، زیرا $\alpha \cap \beta = (MX)$.

مسأله ۴: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه M واقع بر یال $C_1 C$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و $A_1 D_1$ را قطع کند.

حل: اگر از راه حل دوم مسأله اصلی استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است که در آن $X = (A_1 D_1) \cap (MBA)$.

برای رسم، به این ترتیب عمل می‌کنیم (شکل ۶):

$$1) (AN) = (MBA) \cap (AA_1 D_1 D) ; N \in [D_1 D] ;$$

$$2) X = (AN) \cap (A_1 D_1) ; X = (A_1 D_1) \cap (MBA) ;$$

در این صورت، (MX) خط راست مجهول است. روی شکل ۶ داریم:

$$(MX) \cap (A_1 D_1) = X ; (MX) \cap (AB) = Y$$

با هر انتخاب M ، بین C و C_1 ، مسأله جواب دارد.

برای تمرین شما، سه مسأله اصلی دیگر و، برای هریک، دو مسأله اضافی آورده‌ایم.

مسأله اصلی ۲: خط راستی رسم کنید که با خط راست مفروض a موازی باشد و دو خط راست متناظر b و c را قطع کند.

مسأله ۱: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ مفروض است. خط راستی رسم کنید که موازی با $(A_1 D_1)$ باشد و خطهای راست (BC) و $(A_1 B_1)$ را قطع کند.

مسأله ۲: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که با $(A_1 C_1)$ موازی باشد و (BB_1) و (AD) را قطع کند.

مسأله اصلی ۳: از نقطه مفروض، خط راستی بگذرانید که با دو صفحه متقاطع مفروض موازی باشد.

مسأله ۱: هرم $SABCD$ و نقطه M واقع بر یال SD مفروضند. از نقطه M خط راستی عبور دهید که با صفحه‌های SAB و SCD موازی باشد.

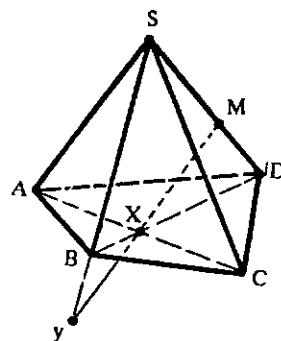
مسأله ۲: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ داده شده است. از رأس A_1 ، خط راستی موازی با صفحه‌های $AB_1 D_1$ و $BB_1 C_1 C$ رسم کنید.

مسأله اصلی ۴: از نقطه مفروض، صفحه‌ای بگذرانید که با دو خط راست متناظر مفروض، موازی باشد.

مسأله ۱: چهاروجهی $SABC$ و نقطه M واقع بر یال SC مفروضند. از

مسأله ۲: هرم $SABCD$ مفروض است. از نقطه M واقع بر یال SD ، خط راستی بگذرانید که دو خط راست SB و AC را قطع کند.

شکل ۴



حل: برای پیدا کردن خط راست مجهول، کافی است نقطه

برخورد خط راست AC را با صفحه $(SBD) = \alpha$ پیدا کنیم.

نقطه $X = (AC) \cap (BD)$ را به دست می‌آوریم (شکل ۴). در

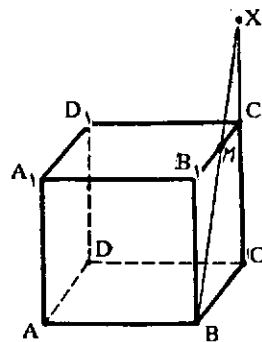
این صورت $X = (AC) \cap \alpha$ که با شرط $(MX) \cap (SB) \neq \emptyset$ خط راست MX ، خط راست مجهول است.

مسأله ۳: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه M روی یال $B_1 C_1$ مفروضند. خط راستی رسم کنید که از نقطه M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.

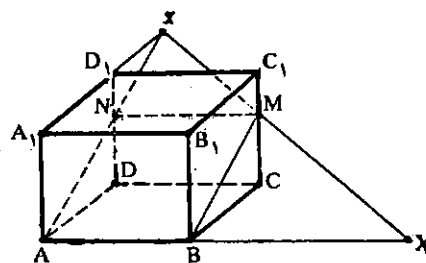
حل: (MB) ، خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع

$$(MB) \cap (AB) = B ; (MB) \cap (CC_1) = X$$

شکل ۵



شکل ۶



ممکن است در حل مسأله‌های فرعی مربوط به آن، دشواریهایی، چه از نظر تجسم فضایی و چه از نظر رسم پدید آید، از طرف دیگر حل این مسأله‌های تکمیلی، نوعی تکرار برای مسأله کلی است.

حَلّ دقیق این مسأله‌ها، بویژه، برای مسأله‌هایی مفید است که، در آنها، باید مقطع یک چندوجهی را (مثل هرم، منشور و غیره) پیدا کرد و می‌دانیم جست و جو و رسم مقطع، یکی از اساسیترین بحثها در هندسه فضایی است.

نقطه M ، صفحه‌ای عبور دهید که با خطهای راست SA و BC موازی باشد.

مسأله ۲: مکعب مستطیل $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ و نقطه M واقع بر یال $C_1 D_1$ مفروضند. از نقطه M صفحه‌ای بگذرانید که با خطهای راست AA_1 موازی باشد.

تجربه نشان داده است که با وجود درک و حل مسأله اصلی،

تفریح اندیشه ۶

هنگامی که مهرداد سن کنونی پدرش را داشته باشد، خواهرش دو برابر سن فعلی خود را خواهد داشت. و وقتی که خواهرش به سن فعلی پدرش برسد، سن پدرش ۲ برابر سن فعلی مهرداد خواهد بود. اگر اکنون مجموع سن این سه نفر ۱۰۰ سال باشد، سن هریک را تعیین کنید.

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی
ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

