



تاریخچه نمادهای ریاضی و اتحادها

در شماره ۳۸ مجله برهان، مقاله‌ای درباره اتحادها و معادله‌ها داشتیم و در آن به معرفی این دو و تفاوت‌هایشان پرداختیم. اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

برابری حتی پیش از تولد دکارت پیدا شده بود. کسی که علامت امروزی برابری را قرار گذاشت، روبرت رکورد (۱۵۵۸-۱۵۱۰) پزشک و ریاضیدان لندنی بود. خودکورد در این باره می‌نویسد: «هیچ چیز، مانند دو پاره خط راست موازی (=)، نمی‌تواند مفهوم برابری را برساند.»

فرانسوادیث (۱۶۰۳-۱۵۴۰) حقوقدان و ریاضیدان فرانسوی، برای نخستین بار از یک حرف لاتینی برای نشان دادن مجهول استفاده کرد. او از حرف «N» برای مجهول استفاده می‌کرد.

البته در سرزمین میان‌دورود (بین‌النهرین)، عیلام، مصر و چین نمادهایی وجود داشت که بیش‌تر آن‌ها فراموش شد و به نسل‌های بعدی نرسید. به ویژه در میان دورود، نه تنها نشان‌هایی برای عددها و صفر داشتند، بلکه عددها را به صورت موضعی می‌نوشتند؛ یعنی هر رقم در مکان خود

پیش از آن که جبر علامتی به وجود آید و نمادهایی برای «+»، «-»، «=»، مجهول (x یا y) و غیره پیدا شود، اغلب مسأله‌های جبر را به یاری هندسه حل می‌کردند.

نمادهای «+» و «-» از پایان سده پانزدهم میلادی فقط در آلمان به کار می‌رفتند، ولی میخائیل شتیفل (۱۵۶۷-۱۴۸۷) کشیش و ریاضیدان آلمانی، به آن‌ها رسمیت داد. در آلمان روی بشکه‌های خالی علامت «-» و روی بشکه‌ها علامت «+» می‌گذاشتند و شتیفل و دیگران از همین نمادها برای جمع و تفریق استفاده می‌کردند. شتیفل برای ضرب و تقسیم از حرف‌های لاتینی «m» و «d» (که حرف‌های اول واژه‌های «multiplicather» به معنی ضرب و «divisio» به معنی تقسیم بود) استفاده می‌کرد.

رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶)، فیلسوف، نویسنده و ریاضیدان فرانسوی، برای نشان برابری از علامت ویژه‌ای شبیه «=» استفاده می‌کرد؛ گرچه علامت امروزی برای

معنای خاصی داشت. ولی از همه این‌ها، تنها تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و بعد دقیقه و ثانیه باقی ماند. مردم سرزمین بابل فکر می‌کردند، در حرکت ظاهری خورشید، به دور زمین، خورشید هر روز به تقریب به اندازه ۱۸۰ برابر قطر خود حرکت می‌کند و بنابراین دایره‌ای که در شبانه‌روز می‌پیماید، ۳۶۰ برابر قطر خورشید است. به همین مناسبت، محیط دایره را به ۳۶۰ بخش تقسیم کردند و هر بخش را یک درجه نامیدند که امروز هم به کار می‌رود. مبنای عددشماری بابلی‌ها ۶۰ بود و بنابراین عددهای کم‌تر از واحد را هم به شصت تقسیم می‌کردند و هر بخش را دقیقه می‌نامیدند. مردم سرزمین «میان‌دورود» نشان‌های دیگری (البته با خط میخی) هم داشتند که به دلیل فراموش شدن، از آن‌ها می‌گذریم.

نخستین بار رنه دکارت در سال ۱۶۳۷ از حروف x ، y و z برای نشان دادن مجهول یا کمیت متغیر، استفاده کرد. مجهول را محمد فرزند موسی، مشهور به خوارزمی «شیء» می‌نامید. شتیفل در سده شانزدهم از حرف R برای مجهول استفاده می‌کرد که حرف اول از واژه آلمانی «Res» به معنای «چیز» یا «شیء» است؛ یعنی از همان واژه خوارزمی سود برده است.

از علامت a^n ، برای نشان دادن توان‌های مختلف عدد (وقتی n ، عددی طبیعی باشد)، نخستین بار در سال ۱۶۳۷ به وسیله دکارت استفاده شد. علامت ریشگی را آلبرت ژیرار (۱۶۳۲-۱۵۹۵) در سال ۱۶۲۹ و علامت‌های $\cos$ ، $\sin$ (سینوس و کسینوس) را لئوناردو اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) در سال ۱۷۴۸ و علامت $\tan$ (تانژانت) را هم او در سال ۱۷۵۳، قرار گذاشتند. یادآوری می‌کنیم واژه سینوس به معنای «گریان» و درست ترجمه واژه عربی «جیب» به زبان فرانسوی است که از روی نوشته‌های محمد خوارزمی برداشته شده است. به احتمال زیاد، خوارزمی از واژه «چپ» زبان پهلوی استفاده می‌کرده و نسخه نویسان کتاب او که پهلوی نمی‌دانستند و معنایی برای «چپ» در زبان عربی پیدا نمی‌کردند، آن را به «جیب» به معنی «گریان» تغییر دادند که هیچ ربطی به مفهوم «سینوس» ندارد.

منظور از بیان مطالب فوق این بود که نشان داده شود، نمادهای ریاضی که امروز معمول هستند، در زمانی نه چندان دور مقرر شدند و به زحمت از عمر قدیمی‌ترین آن‌ها، ۵۰۰ سال می‌گذرد و برای نمونه، میخائیل شتیفل که سهم بزرگی در معرفی نمادهای ریاضی دارد، برای نشان دادن معادله:

$$116 + \sqrt{41372} - 18x - \sqrt{648x}^2 = 0$$

این طور می‌نوشت:

$$116 + VZ41372 - 18R - VZ648acq a ntaseo$$

شتیفل ریشگی را با «V» (حرف اول واژه Vadim به معنی ریشه) نشان می‌داد و از نظر او «VZ» یعنی ریشه دوم. این معادله از کتاب «حساب کامل» شتیفل برداشته شده است. به نمادهای دیگر نمی‌پردازیم. همین قدر کافی است تا بیندیشیم، یونانی‌ها و یارایضیدانان ایرانی که از نمادها و جبر علامتی آگاه نبودند، چرا برای اثبات از هندسه کمک می‌گرفتند و یا به شرح و توضیح رو می‌آوردند.

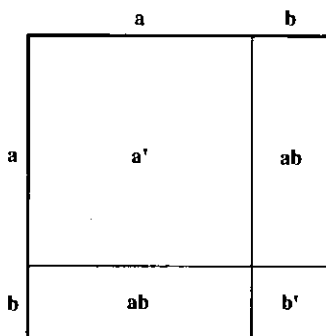
اکنون ببینیم چگونه با اتحادها از دید هندسی برخوردار می‌کردند. در سده سوم پیش از میلاد، اقلیدس کتاب خود را به نام «مقدمات» نوشت که شامل ۱۳ بخش بود. بخش دوم این کتاب مربوط به اتحادهای جبری است که البته، با استدلال‌ها و تعبیرهای هندسی نوشته شده است. برای نمونه، او در مسأله دهم از بخش دوم کتاب خود، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

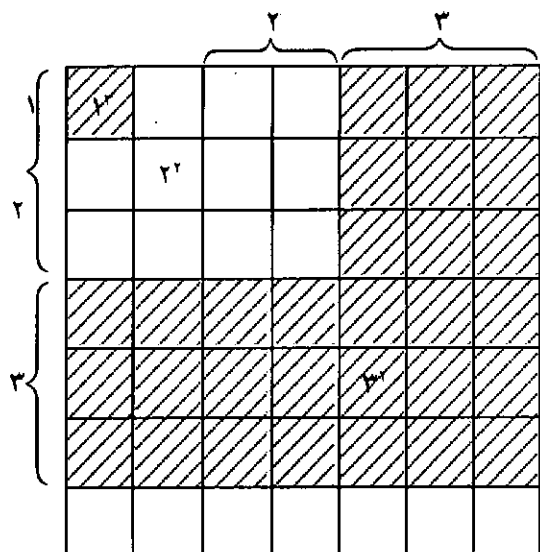
را ثابت کرده است. از زبان خود اقلیدس بخوانیم:

«اگر پاره خط راستی را به دو بخش تقسیم کنیم، آن وقت مربعی که روی تمامی این پاره خط راست ساخته می‌شود، برابر است با

مجموع مربع‌هایی که هر کدام از بخش‌ها ساخته شده است و دو برابر مستطیلی که روی بخش‌ها ساخته می‌شود.»



شکل ۱



شکل ۳

به شکل توجه کنید: بخشی از یک مربع که طول ضلع آن برابر $1+2+3+\dots+n$ است، به مربع های کوچک تر به ضلع واحد تقسیم شده است. مساحت تمامی مربع بزرگ، برابر است با:

$$(1+2+3+\dots+n)^2 \quad (1)$$

همین مربع را به بخش های جداگانه ای تقسیم کرده ایم و آن ها را یک در میان هاشور زده ایم. مربع هاشور خورده سمت چپ، مساحتی برابر ۱ (یا 1^2) دارد. بخش های بعدی که یکی سفید و دیگری هاشور خورده است، شامل ۸ مربع (2^2) ، ۲۷ مربع (3^2) و غیره است. پس مساحت تمامی مربع چنین می شود:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad (2)$$

عبارت های عددی (۱) و (۲) معرف یک مقدار از مساحت مربع بزرگ هستند و بنابراین:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (1+2+\dots+n)^2$$

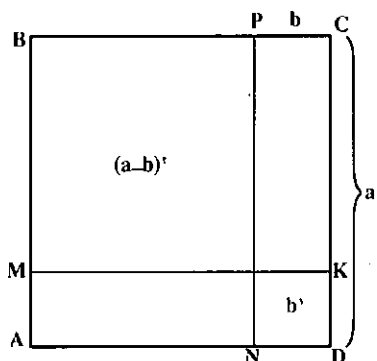
بنابر قضیه ای که معروف به «قضیه فیثاغورس» است، اگر دو ضلع پهلوی زاویه قائمه را با a و b و وتر را با c نشان دهیم، این رابطه بین آن ها برقرار است:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

پیدا کردن عددی درستی (و به احتمالی گویا) که در این دستور صدق کند، از همان دوران کهن مورد توجه

در شکل ۱ به روشنی دیده می شود که مساحت مربعی به ضلع $a+b$ ، برابر است با مجموع چهار مساحت: مساحت مربع به ضلع a ، مساحت مربع به ضلع b و مساحت های دو مستطیل برابر با بعدهای a و b .

همچنین، با توجه به شکل ۲، می توان اتحاد $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ را ثابت کرد؛ به شکل توجه کنید:



شکل ۲

در این شکل، اگر a^2 (مساحت مربع بزرگ به ضلع a) را با b^2 (مساحت مربع کوچک به ضلع b) جمع کنیم و مساحت دو مستطیل AMKD و NPCD را از آن برداریم، مساحت مربع به ضلع $(a-b)$ به دست می آید.

دیوفانت که در سده سوم پیش از میلاد در اسکندریه می زیست، کتابی به نام «حساب» دارد. او در این کتاب، اتحادهای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

را از دیدگاه حساب بررسی می کند و آن ها را «قانون های اصلی حساب» می نامد.

ریاضیدانان ایرانی هم اتحادهای جبری را می شناختند و از آن ها استفاده می کردند؛ و البته در بیش تر حالت ها، آن ها را با شکل های هندسی نشان می دادند. برای نمونه، اتحاد عددی $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (1+2+\dots+n)^2$ را روی یک شکل هندسی نشان می دادند (شکل ۳):

چند نمونه از این مثلث‌ها را در ادامه می‌آوریم:

۱. برای $m=2$ و $n=1$ به دست می‌آید:
 $a=3$ و $b=4$ و $c=5$
 ۲. برای $m=3$ و $n=2$ به دست می‌آید:
 $a=5$ و $b=12$ و $c=13$
 ۳. برای $m=4$ و $n=1$ به دست می‌آید:
 $a=15$ و $b=8$ و $c=17$
 ۴. برای $m=4$ و $n=3$ به دست می‌آید:
 $a=7$ و $b=24$ و $c=25$
 ۵. برای $m=10$ و $n=1$ به دست می‌آید:
 $a=99$ و $b=20$ و $c=101$
 ۶. برای $m=10$ و $n=7$ به دست می‌آید:
 $a=51$ و $b=140$ و $c=149$
- ادامه دارد...

ریاضیدانان بوده است. از جمله مردم مصر، عیلام و بابل کهن، برای رسم دو خط عمود بر هم بر روی زمین (که برای کارهای کشاورزی لازم بود)، از طنابی استفاده می‌کردند که به ۳، ۴ و ۵ بخش تقسیم شده بود؛ دو بخش به طول‌های ۳ و ۴ بر هم عمود بودند.

اتحادی وجود دارد که به یاری آن می‌توان مثلث‌های فیثاغورسی را (یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی طبیعی هستند) پیدا کرد. این اتحاد که در دوران یونان باستان نیز شناخته شده بود، چنین است:

$$(m-n)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

(آزمایش کنید تا از درستی این اتحاد، مطمئن شوید.)

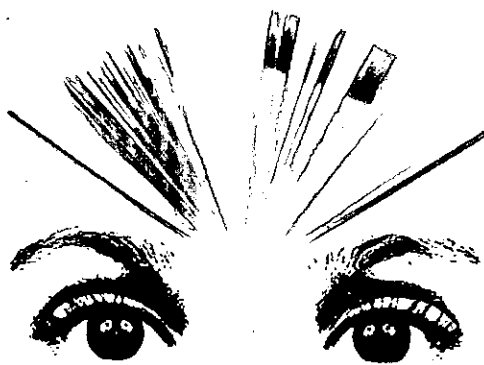
بنابراین، اگر $m > n$ را دو عدد طبیعی دلخواه در نظر بگیریم، آن وقت یک مثلث فیثاغورثی با ضلع‌های a ، b و c به دست می‌آید:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

ادب ریاضی

فرگه، منتقدان آلمانی به پیروی از طرز تفکر کانت، در کتاب «مبانی حساب» خود می‌نویسد: حقایق هندسی بر هر چه برای ما از جنبه فضایی قابل درک باشد، حکومت می‌کنند؛ خواه مستدرکات ما واقعی باشند و خواه محصول تخیلمان.

پرت و پلاهایی که به هنگام هذیان می‌شنویم، قوی‌ترین مخترعات افسانه و شعر، جایی که جانوران سخن می‌گویند و ستارگان خاموش می‌مانند، جایی که آدمیان سنگ می‌شوند و درختان آدمی می‌گردند، جایی که غرق شدگان در آب، زلف خود را می‌گیرند و خود را از آب بیرون می‌کشند، همه، تا وقتی که قابل درک باشند، تابع اصول هندسی هستند.



تفریح اندیشه

مجموع دو ریشه از سه ریشه معادله زیر، صفر است:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.