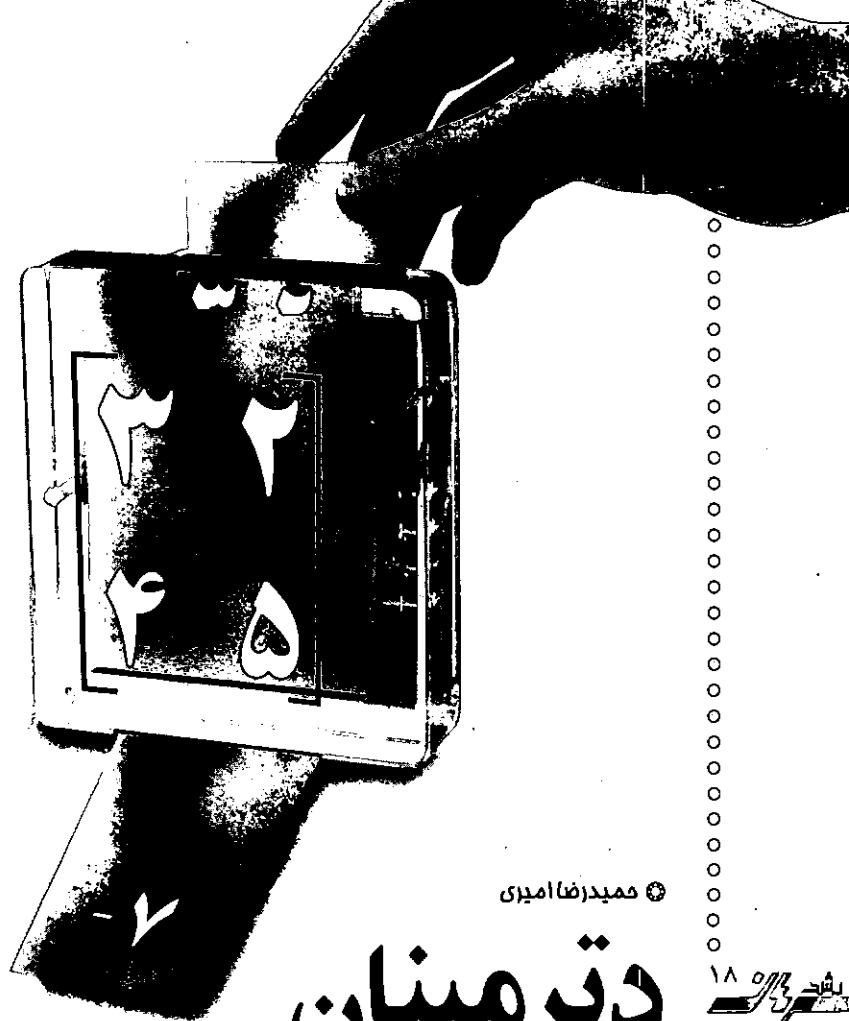




محمدرضا امیری

دترمینان

کاربرد قضایا و نکته های دترمینان در حل مسأله ها برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

در شماره قبل قضیه ها و ویژگی های مربوط به دترمینان را بیان کردیم، حال با استفاده از قضیه ها و ویژگی های ذکر شده می خواهیم به طرح و حل مسائل متنوعی در این زمینه بپردازیم. مسائل مربوط به ویژگی های دترمینان بسیار جالب، سرگرم کننده و تفکربرانگیزند و می توان آن ها را به سه نوع تقسیم کرد. این ویژگی ها در قالب مسائل حل شده در این مقاله می آیند.

زا با C_j نمایش می دهیم.)

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 3 \\ b & a+c & 3 \\ c & a+b & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{vmatrix} a & a+b+c & 3 \\ b & a+b+c & 3 \\ c & a+b+c & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ c & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times 0 = 0$$

مسائل نوع اول: مسائلی که در آن ها باید ثابت کنیم

مقدار یک دترمینان صفر است. در این نوع مسأله ها تلاش می کنیم که دو سطر یا دو ستون مضربی از یکدیگر شوند یا یک سطر یا یک ستون آن ماتریس صفر شود.

مسأله ۱. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 3 \\ b & a+c & 3 \\ c & a+b & 3 \end{vmatrix} = 0$$

حل. (متذکر می شوم که سطر i ام را با R_i و ستون j ام را با C_j نمایش می دهیم.)

حل . (ستون های دوم، سوم و چهارم را به ستون اول اضافه می کنیم.)

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

مسئله ۵. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin(x+t) & \sin(y+t) & \sin(z+t) \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x \cos t + \sin t \cos x & \sin y \cos t + \sin t \cos y & \sin z \cos t + \sin t \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x \cos t & \sin y \cos t & \sin z \cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin t \cos x & \sin t \cos y & \sin t \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x & \sin y & \sin z \end{vmatrix} + \sin t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \times 0 + \sin t \times 0 = 0 + 0 = 0$$

مسئله ۶. ثابت کنید:

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \frac{1}{a \times b} \begin{vmatrix} ax & bx' & ax + bx' \\ ay & by' & ay + by' \\ az & bz' & az + bz' \end{vmatrix}$$

مسئله ۲. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} = 0$$

حل: از رابطه $\log a + \log b = \log(ab)$ کمک

می گیریم و ستون دوم را به ستون سوم اضافه می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(xyz) \\ 5 & \log y & \log(xyz) \\ 5 & \log z & \log(xyz) \end{vmatrix}$$

$$= \log(xyz) \begin{vmatrix} 5 & \log x & 1 \\ 5 & \log y & 1 \\ 5 & \log z & 1 \end{vmatrix} = \log(xyz) \times 0 = 0$$

مسئله ۳. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & ay + az & x - t \\ a & ax + az & y - t \\ a & ax + ay & z - t \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$\begin{vmatrix} a & ay + az & x - t \\ a & ax + az & y - t \\ a & ax + ay & z - t \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} y + z & x - t \\ x + z & y - t \\ x + y & z - t \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+C_2} \begin{vmatrix} a & x+y+z-t & x-t \\ a & x+y+z-t & y-t \\ a & x+y+z-t & z-t \end{vmatrix} = a(x+y+z-t) \begin{vmatrix} 1 & x-t \\ 1 & y-t \\ 1 & z-t \end{vmatrix}$$

(ستون اول، a برابر ستون دوم است.)

$$= a(x+y+z-t) \times 0 = 0$$

مسئله ۴. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

حل. (۱-) برابر ستون اول را به بقیه ستون ها اضافه می کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 1 \times a \times b \times c = abc$$

مسئله ۹. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^3$$

حل.

$$|A| \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 1+a^2 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-C_1+C_3} \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^3$$

مسئله ۱۰. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2-1 & 2y^2-1 & 2z^2-1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2(y-x)(x-z)(z-y)$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2 & 2y^2 & 2z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(x-y)(x-z)(y-z)$$

$$\xrightarrow{C_1+C_2} \frac{1}{ab} \begin{vmatrix} ax+bx' & bx' & ax+bx' \\ ay+by' & by' & ay+by' \\ az+bz' & bz' & az+bz' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{ab} \times 0 = 0$$

مسائل نوع دوم: مسائلی که در آن ها باید ثابت کنیم مقدار یک دترمینان برابر با عددی ناصفر یا عبارتی جبری است. در این نوع مسأله ها باید سعی کنیم با استفاده از ویژگی های دترمینان، ماتریس را مثلی کنیم و حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی که همان دترمینان ماتریس است، جواب مسأله خواهد بود.

مسئله ۷. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

حل. قرینه ستون چهارم را به ستون های اول، دوم و سوم اضافه می کنیم.

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \times 1 \times 1 \times 1 = 9$$

مسئله ۸. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc$$

مسئله ۱۱. اگر $x+y+z=0$ ، ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = a^3$$

حل. یک برابر ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x+y+z=0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} -R_1+R_2 \\ = \\ -R_1+R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

مسئله ۱۲. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & b & b \\ a & b+1 & a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = 4ab$$

حل.

$$|A| \stackrel{-C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & b \\ a & b+1-a & a \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & b \\ a & b+1-a & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{-C_2+C_1}{=} (a+b) \begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & b \\ a^2+ab-a & b+1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & b \\ a^2+ab-a & b+1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{-R_1+R_2}{=} \begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & b \\ -2a & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{-aC_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 2ab & b-a-1 & b \\ 0 & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4ab$$

مسائل نوع سوم. مسائلی که در آن‌ها تساوی بین دو دترمینان مطرح است و برای حل این نوع مسائل باید (مانند اثبات اتحادها) از یک طرف شروع کنیم و با استفاده از ویژگی‌های ذکر شده، به طرف دیگر برسیم.

مسئله ۱۳. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \times (xyz-1) = k(xyz-1)$$

حل.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

در ستون‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب از x ، y و z فاکتور

می‌گیریم.

$$xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (xyz) \times k - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (xyz)k - k = k(xyz-1)$$

مسأله ۱۴. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در سطرهای اول تا چهارم، به ترتیب a, b, c, d ضرب و کل دترمینان بر $abcd$ تقسیم شده است.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ b^2 & ab & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & ac & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & ad \end{vmatrix}$$

از ستون‌های دوم، سوم و چهارم، به ترتیب از b, c, d فاکتور گرفته ایم.

$$= \frac{bcd}{abcd} \begin{vmatrix} a^2 & a & a & a \\ b^2 & a & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & a & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(سطر اول و ستون اول هر کدام در a ضرب شده اند.)

$$= \frac{1}{a \times a \times a} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ ab^2 & a & 0 & 0 \\ ac^2 & 0 & a & 0 \\ ad^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(در سطرهای دوم، سوم و چهارم، از a فاکتور گرفته ایم.)

$$= \frac{a^2}{a^3} \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

مسأله ۱۵. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

حل. از سمت چپ تساوی شروع و در ستون‌های ۲، ۳ و ۴، به ترتیب yz, xz, xy را ضرب می‌کنیم (لذا باید بر $x^2y^2z^2$ تقسیم شود.) سپس از xyz در سطر اول و از x, y و z به ترتیب در سطرهای دوم، سوم و چهارم فاکتور می‌گیریم.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz \times xyz}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{مسأله ۱۶. فرض کنیم } A = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \text{، در این صورت، با استفاده از ماتریس } (AA^t) \text{ ثابت کنید:}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

حل.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} = B$$

$$\text{از طرفی: } |AA^t| = |A| |A^t| = |A| |A| = |A|^2$$

$$\Rightarrow |AA^t| = |B| \Rightarrow |A|^2 = |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (xyz + xyz) - (0 + 0 + 0) = 2xyz$$

$$\Rightarrow |B| = (2xyz)^2 = 4x^2y^2z^2$$

نکته ۱. اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ سه بردار در فضای سه بعدی (IR^3) باشند، در این صورت:

الف) حاصل ضرب خارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

ب) مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و مساحت مثلث پدید آمده از آن ها از فرمول های زیر حاصل می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{مساحت متوازی الاضلاع} = |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \end{cases}$$

(منظور از $|\vec{a} \times \vec{b}|$ اندازه بردار $(\vec{a} \times \vec{b})$ است.)

ج) حجم متوازی السطوح پدید آمده از سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{قدر مطلق } (k) = V = \text{حجم} \\ \text{ضرب مختلط} = a \cdot (b \times c) = k \end{cases}$$

مسئله ۱۷. اگر A ماتریسی 3×2 و B ماتریسی 2×3 و $A \times B = C$ باشد، که C ماتریسی 3×3 خواهد شد، ثابت کنید $|C| = 0$.

$$B = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \text{ حل. فرض کنیم}$$

و می دانیم که:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} = C_{3 \times 3}$$

حال اگر یک ستون صفر به ماتریس A و یک سطر صفر به ماتریس B اضافه کنیم تا به ترتیب، ماتریس های A_1 و B_1 به دست آیند، واضح است که $A_1 \times B_1 = C$ خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$A_1 \times B_1 = C \Rightarrow |A_1 \times B_1| = |C| \Rightarrow |A_1| \times |B_1| = |C|$$

$$\Rightarrow 0 \times 0 = |C| \Rightarrow |C| = 0$$

تذکر بسیار مهم: مسئله قبل در حالت کلی نیز برقرار است، یعنی می توان گفت: «اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ و $m > n$ و فرض کنیم $A \times B = C$ باشد؛ در این صورت $|C| = 0$ (اثبات، شبیه به اثبات مسئله قبل و به عهده شماست.)

نتیجه. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد و $m > n$ ، در این صورت، همواره $A^t A = 0$ است و داریم:

$$|AA^t| = 0$$

نکات مهم و کاربردهای دترمینان در محاسبه مساحت و حجم

از اثبات رابطه ها و فرمول ها، به دلیل خارج بودن از بحث اصلی و نیاز به مفاهیم دیگر در هندسه تحلیلی، خودداری می کنیم و فقط به معرفی آن ها می پردازیم.

هادی $u_2 = (p_2, q_2, r_2)$ باشد، در این صورت:

الف) شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو خط L_1 و L_2 آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار بگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع اند} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1}{p_2} \neq \frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2} \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

(سه بردار $\vec{AB}$ و $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ در یک صفحه باشند.)

ب) شرط لازم و کافی برای آن که دو خط L_1 و L_2 متناظر باشند آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار نگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متناظرند} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1}{p_2} \neq \frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2} \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

ج) دو خط L_1 و L_2 برهم عمودند، اگر و فقط اگر $p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$ باشد. در این صورت داریم:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متناظر و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

(اگر $k = 0$ در این صورت، سه بردار حجمی تشکیل نمی دهند و باید در یک صفحه قرار داشته باشند.)

نکته ۲: اگر $A \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}$ سه نقطه در IR^3

باشند، در این صورت، مساحت مثلث پدید آمده از این سه نقطه برابر است با:

$$k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} |k| \quad (k \text{ قدر مطلق})$$

حالت خاص: اگر O مبدأ مختصات باشد، در این

$$\text{صورت} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad k = \text{خواهد بود}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |k| \quad \text{و} \quad \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ برابر با } |k| \text{ است.}$$

نکته ۳: اگر $P_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ و $P_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ و $P_3 \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$ سه نقطه

در IR^3 باشند، در این صورت معادله صفحه ای که از این سه نقطه عبور می کند از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

نکته ۴: اگر نقطه $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ متعلق به خط L_1 با بردار هادی

$$\vec{u}_1 = (p_1, q_1, r_1) \text{ و نقطه } B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \text{ متعلق به خط } L_2 \text{ با بردار}$$