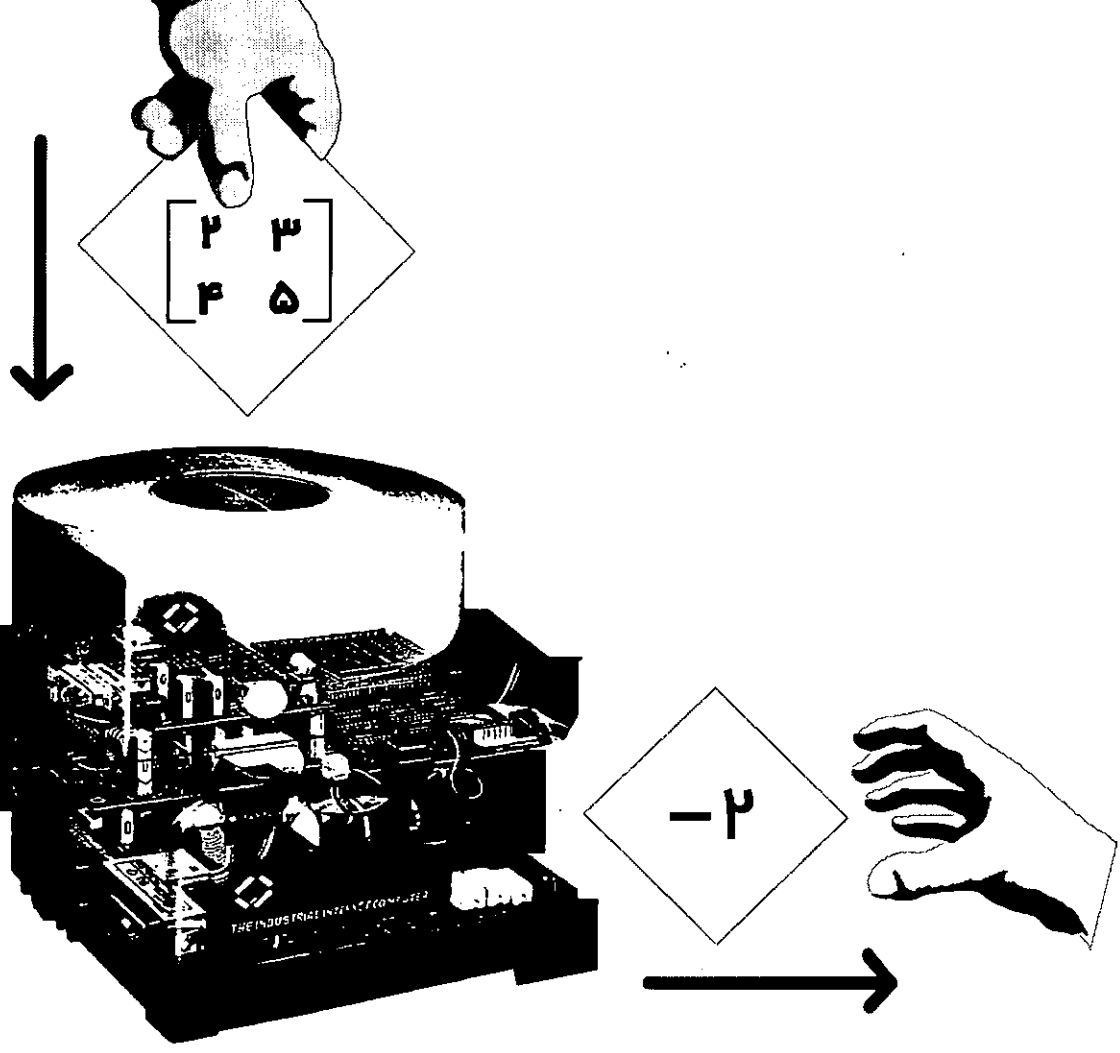




ممدرفضا امیری

دترمینان

قضایا، نتایج، نکته ها و مسأله ها برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی



تبدیل یافته را با استفاده از دترمینان ماتریس تبدیل محاسبه کرد. همچنین در حل دستگاه ها و وجود یا عدم وجود جواب آن ها. حتی در مباحث غیر از ماتریس مانند هندسه تحلیلی، در محاسبه مساحت مثلث و متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار و حجم متوازی السطوح حاصل از سه بردار، حتی تشکیل معادله صفحه و ضرب خارجی دو بردار، و... می توان از

به هر ماتریس مربعی می توان عددی حقیقی نسبت داد که «دترمینان» آن ماتریس نام دارد. این عدد حقیقی در بسیاری موارد اطلاعات مفیدی درباره خود ماتریس و خواص آن در اختیار ما قرار می دهد. به عنوان مثال، وارون پذیری یک ماتریس با محاسبه دترمینان آن ماتریس مشخص می شود و یا در بحث ماتریس های تبدیل در صفحه که 2×2 هستند، می توان مساحت شکل

دترمینان استفاده کرد.

برای تعریف دترمینان یک ماتریس، می توان تابعی به نام دترمینان از مجموعه ماتریس های $n \times n$ به اعداد حقیقی به صورت $\det: M_{n \times n} \rightarrow R$ تعریف کرد که ضابطه این تابع روی ماتریس های 1×1 و 2×2 و $n \times n$ ($n \geq 3$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$I) A = [s] \Rightarrow \det(A) = |A| = s$$

$$II) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$$

تذکر: برای تعریف $|A|$ برای ماتریس های 3×3 و به طور کلی $n \times n$ که $n \geq 3$ است، به تعریف دو نماد و اصطلاح نیاز داریم: یکی «کِهاد» و دیگری «همسازه».

تعریف کِهاد

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، M_{ij} را ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A در نظر گرفته و آن را کِهاد متناظر با درایه a_{ij} از ماتریس A می نامیم.

$$\text{مثال: اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ در این صورت}$$

داریم:

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (سطر دوم و ستون اول } A \text{ حذف شده)}$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ (سطر سوم و ستون دوم } A \text{ حذف شده)}$$

تعریف همسازه

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، همسازه نظیر درایه a_{ij} را با A_{ij} نمایش می دهیم و به صورت $A_{ij} = (-1)^{i+j} \times |M_{ij}|$ تعریف می کنیم. با توجه به

ماتریس A در مثال قبل داریم:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \times |M_{21}| = -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times (-2) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \times |M_{32}| = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times (-6) = 6$$

III) اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد که $n \geq 3$ است، دترمینان A برحسب هر سطر یا هر ستون با توجه به ضابطه زیر بسط داده می شود که همواره عددی ثابت است.

فرض کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $|A|$ برحسب یک سطر (ستون) کافی است هر درایه آن سطر (ستون) را در همسازه نظیرش ضرب و همه را با هم جمع کنیم.

$$\text{برحسب سطر اول } |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

$$\text{برحسب سطر } i\text{ام } |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\text{برحسب ستون } j\text{ام } |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

$$\text{مثال: اگر } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ ماتریسی}$$

3×3 و دلخواه باشد، داریم:

$$\text{برحسب سطر اول } |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^1 \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13} \times (-1)^3 \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{برحسب ستون سوم } |A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

حل: گزینه (۴). زیرا:

بر حسب ستون سوم:

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$4 \times (-1) + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 4$$

آزمون:

اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل

$(|A|^2 + 1)$ کدام است؟

۲ یا ۰ (۲) ۲ (۱)

۲ یا ۱ (۴) ۲ یا $\frac{13}{4}$ (۳)

حل: گزینه (۳). زیرا: با توجه به تعریف دترمینان

$$2 \times 2$$

$$|A| = 4|A|^2 - 3 \Rightarrow 4|A|^2 - |A| - 3 = 0$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \text{ یا } |A| = \frac{-3}{4} \Rightarrow |A|^2 = 1 \text{ یا } |A|^2 = \frac{9}{4}$$

$$|A|^2 + 1 = 2 \text{ یا } \frac{13}{4}$$

آزمون:

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و α و β به ترتیب

همسازهای نظیر a_{21} و a_{32} از ماتریس A باشند، در این

صورت $(\alpha + \beta)$ کدام است؟

۱۸ (۲) ۲۰ (۱)

-۱۱ (۴) ۱۷ (۳)

حل: گزینه (۱). زیرا:

$$\alpha = A_{21} = (-1)^2 \times (-2 - 5) = 7, \quad \beta = (-1)^5 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 20$$

$$\Rightarrow |A| = a_{13} \times (-1)^2 \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \times (-1)^5 \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$a_{33} \times (-1)^6 \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

تذکر: توجه دارید که اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون از ماتریسی مفروض باشند و همسازهای نظیر هریک از آن درایه ها نیز معلوم باشند، به راحتی می توان دترمینان آن ماتریس را به دست آورد.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $|A|$

را بر حسب سطر اول و سپس بر حسب ستون اول بسط دهید و به دست آورید.

بر حسب سطر اول:

$$|A| = 3 \times (-1)^2 \times (-4 - 6) + 2 \times (-1)^3 \times (0 - 0) +$$

$$1 \times (-1)^4 \times (0 - 0) = -30$$

بر حسب ستون اول:

$$|A| = 3 \times (-1) \times (-4 - 6) + 0 \times A_{21} + 0 \times A_{31} = -30$$

تذکر: با توجه به تعریف دترمینان واضح است که اگر دترمینان یک ماتریس را بر حسب سطر یا ستونی که تعداد صفرهای واقع در آن بیش از بقیه سطر و ستون ها است بسط دهیم، ساده تر و سریع تر به جواب خواهیم رسید!

آزمون:

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ و ستون سوم آن

$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد و داشته باشیم $A_{13} = -1$ و $A_{23} = 2$ و

$A_{33} = 1$ ، در این صورت $|A|$ کدام است؟

۲ (۲) ۱ (۱)

۴ (۴) ۳ (۳)

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3

در این روش که فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است، ابتدا دو ستون سمت چپ ماتریس را در کنارش می نویسیم. $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن، منهای مجموع حاصل ضرب های درایه های واقع بر قطر فرعی A و دو خط موازی با آن. به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & i & c & f \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + bdi)$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $|A|$

را از دستور ساروس حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(2 \times 2 \times 2) + (-1 \times 1 \times 0) + (4 \times 3 \times 5)] - [(4 \times 2 \times 0) + (2 \times 1 \times 5) + (-1 \times 3 \times 2)]$$

$$\Rightarrow |A| = 68 - 4 = 64$$

ویژگی های (قضیه های) مهم در دترمینان ماتریس ها
۱. دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانزپوز همان ماتریس برابر است. یعنی:

$$|A| = |A^t|$$

برای بررسی و اثبات قضیه ۱ به نکته زیر نیاز داریم:

نکته: اگر A ماتریسی $n \times n$ و A^t ترانزپوز آن باشد و A_{ij} همسازه نظیر a_{ij} از ماتریس A و A^t_{ij} همسازه

نظیر درایه a_{ij} از ماتریس A^t باشد، همواره داریم:

$$A_{ij} = A^t_{ji}$$

حال اگر $|A|$ را برحسب سطر i ام بسط بدهیم، خواهیم داشت:

$$(1) |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

از طرفی می دانیم، همواره $a_{ij} = a^t_{ji}$ است و با توجه به نکته قبل، رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می شود که درواقع همان $|A^t|$ برحسب سطر i ام A^t است.

$$(1) \Rightarrow |A| = a^t_{i1}A^t_{i1} + a^t_{i2}A^t_{i2} + \dots + a^t_{in}A^t_{in} = |A^t|$$

۲. دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی و هم مرتبه برابر است با حاصل ضرب دترمینان های آن دو ماتریس. یعنی: $|AB| = |A| |B|$

(به علت طولانی بودن روش اثبات، از آن صرف نظر می کنیم و آن را بدون اثبات می پذیریم.)
نتیجه ۱: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، در این صورت داریم:

$$|AA^t| \geq 0$$

اثبات:

$$|AA^t| \stackrel{\text{قضیه ۲}}{=} |A| |A^t| \stackrel{\text{قضیه ۱}}{=} |A| |A| = |A|^2 \geq 0$$

نتیجه ۲: اگر A و B ماتریس های مربعی و هم مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA|$$

اثبات: (توجه دارید که در حالت کلی تساوی $AB = BA$ برقرار نیست.)

$$|AB| = |A| |B| = |B| |A| = |BA|$$

آزمون:

اگر A ماتریسی 2×2 باشد، در این صورت کدام ماتریس می تواند AA^t باشد؟

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (4) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: گزینه (۳). زیرا، ماتریس AA^t دو ویژگی مهم دارد. اول این که باید AA^t متقارن باشد و دوم این که باید $|AA^t| \geq 0$ باشد. با کمی دقت مشاهده می‌کنید فقط ماتریس داده شده در گزینه (۳) هر دو ویژگی را دارد.

آزمون:

اگر A و B ماتریس‌هایی 2×2 باشند و $AB = \begin{bmatrix} 7 & 19 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس BA کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 11 & 29 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

حل: گزینه (۴). زیرا، اگر AB و BA را در حالت کلی با هم مقایسه کنیم، در دو خاصیت مشترکند. اول این که $|AB| = |BA|$ (که ثابت شد) و دوم این که «حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی AB با حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است». به عبارت دیگر، $\text{trac}(AB) = \text{trac}(BA)$ است و فقط گزینه ۴ از هر دو خاصیت برخوردار است.

مسئله:

اگر A ماتریسی 3×3 باشد، به قسمی که $AA^t = 3I$ ، در این صورت مقدار $|A|$ را به دست آورید.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t| = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 3^3 \Rightarrow |A| = \pm 3\sqrt{3}$$

نتیجه ۳: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، داریم:

$$\forall k \in \mathbb{N}, |A^k| = |A|^k$$

اثبات به استقرا: برای $k=1$ تساوی بدیهی است. فرض کنیم تساوی به ازای m برقرار باشد، یعنی $|A^m| = |A|^m$. برای $m+1$ تساوی را ثابت می‌کنیم:

$$|A^{m+1}| = |A^m \times A| = |A^m| |A| \stackrel{\text{فرض}}{=} |A|^m |A| = |A|^{m+1}$$

۳. دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی یا پائین مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \dots \times a_{nn}$$

اثبات به استقراء روی مرتبه ماتریس

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد که واضح است $|A| = ad - bc$.

حال فرض کنیم، حکم برای هر ماتریس از مرتبه k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای ماتریسی از مرتبه $(k+1)$ نیز برقرار است: (فرض می‌کنیم $k+1 = \alpha$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\alpha} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{بر حسب ستون اول}]{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\alpha} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times (a_{22} \times a_{33} \times \dots \times a_{\alpha\alpha})$$

(دترمینان اخیر، دترمینان یک ماتریس $k \times k$ است که طبق فرض استقراء حاصل آن برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.)

نتیجه ۴: اگر A ماتریسی قطری باشد (هم بالا مثلثی و هم پائین مثلثی است)، در این صورت دترمینان A برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن. و خصوصاً اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبه n باشد و داشته

((KI) ماتریسی اسکالر است)

$$KI = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix} \Rightarrow |KI| = K^n$$

از طرف دیگر:

$$KA = (KI)A \Rightarrow |KA| = |(KI)A| = |KI||A| = K^n|A|$$

نتیجه ۶: اگر A ماتریسی پادمتقارن از مرتبه n و n فرد باشد، آن گاه $|A| = 0$.

اثبات:

$$A \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| = |(-1)A| = (-1)^n |A| = -|A| \quad (n \text{ فرد است})$$

$$\Rightarrow |A^t| = -|A| \xRightarrow{\text{قضیه ۱}} |A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نکته: دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه زوج، عددی مربع کامل است.

آزمون:

اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = a$ باشد، در این صورت حاصل $||A|A|A|$ کدام است؟

$$a^{12} \quad (2) \quad a^{10} \quad (1)$$

$$a^{11} \quad (4) \quad a^{15} \quad (3)$$

حل: گزینه (۲). زیرا:

$$||A|A|A| = ||aA|A| = |a^3|A|A|$$

$$= |a^3 \times aA| = |a^4 A| = (a^4)^3 |A| = a^{12} \times a = a^{13}$$

آزمون:

$$\text{معادله } \begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & y^2+1 \\ 1 & 0 & 2z \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ مفروض است،}$$

باشیم $a_{ii} = \lambda$ ، در این صورت $|A| = \lambda^n$ است و چون I (ماتریس همانی یا واحد) اسکالر و $a_{ii} = 1$ است، پس همواره $|I| = 1$ خواهد بود.

۴. هرگاه یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد حقیقی k ضرب شود، در این صورت دترمینان آن ماتریس در عدد k ضرب می شود، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اثبات: فرض کنیم، ماتریس A مربعی از مرتبه n و عدد k در سطر iam ضرب شود و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می کنیم $|B| = k|A|$

بر حسب سطر iam:

$$|B| = k a_{i1} A_{i1} + k a_{i2} A_{i2} + \dots + k a_{in} A_{in} = k(a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in}) = k|A|$$

تذکر: قضیه فوق به راحتی این امکان را به ما می دهد که در یک دترمینان در هر سطر یا ستون از عددی فاکتور گرفت یا اگر یک عدد در یک دترمینان ضرب شده باشد، بتوان بر حسب نیاز آن را به داخل دترمینان برد و فقط در یک سطر یا یک ستون ضرب کرد.

نتیجه ۵: اگر k عددی حقیقی و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت داریم:

$$|KA| = k^n |A|$$

اثبات: ماتریس KA ماتریسی است که از ضرب عدد k در تمام سطرهای A به دست می آید. حال برای محاسبه $|KA|$ می توان از هر سطر KA عدد حقیقی k را فاکتور گرفت و چون n سطر دارد، پس عدد $k^n |A|$ حاصل می شود. به روش دیگری نیز می توان این قضیه را ثابت کرد:

اگر x و y و z یک دسته جواب برای این معادله باشند، $(x+y+z)$ کدام می تواند باشد؟

$$\begin{matrix} ۲(۲) & -۵(۱) \\ & \\ & \end{matrix} \quad \begin{matrix} ۰(۳) \\ -۱(۴) \end{matrix}$$

حل: گزینه (۱). زیرا، می دانیم دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد، همواره صفر است. پس اگر $-۱ = -۱ = ۱ - x^2$ و $۱۰ = ۱ + y^2$ و $۴ = ۲z$ باشد، ماتریس پادمتقارن شده و دترمینان آن صفر است. پس باید $x = ۰$ و $y = \pm ۳$ و $z = ۲$ باشد که در این صورت داریم:

$(x+y+z) = ۵$ یا $(x+y+z) = -۱$
۵. اگر ماتریسی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد، آن گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم، سطر i ام ماتریس A از مرتبه n صفر باشد. در این صورت اگر $|A|$ را بر حسب سطر i ام بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$|A| = ۰ \times A_{i1} + ۰ \times A_{i2} + \dots + ۰ \times A_{in} = ۰ + ۰ + \dots + ۰ = ۰$$

نتیجه ۷: دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

۶. اگر در ماتریسی جای دو سطر را با هم و یا جای دو ستون را با هم عوض کنیم، آن گاه دترمینان ماتریس حاصل قرینه ماتریس قبل خواهد بود.

راهنمایی اثبات: کافی است دو سطر i ام و j ام A را با هم جابه جا کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم. سپس $|A|$ را بر حسب سطر i ام و $|B|$ را بر حسب سطر j ام به دست آوریم (ابتدا دو سطر مجاور را با هم جابه جا و بعد در حالت کلی قضیه را اثبات کنید).

۷. اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون برابر وجود داشته باشد، آن گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بوده و سطر

i ام آن با سطر j ام آن برابر باشد. اگر جای این دو سطر را با هم عوض کنیم، ماتریس تغییر نمی کند و فقط دترمینان آن قرینه می شود. پس:

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نتیجه ۸: اگر در ماتریس مربعی A یک سطر مضربی از سطر دیگر یا یک ستون مضربی از ستون دیگر باشد، آن گاه $|A| = ۰$.

اثبات: اگر در ماتریس A سطر k ام، λ برابر سطر i ام باشد، برای محاسبه $|A|$ از λ در سطر k ام فاکتور می گیریم و λ را در دترمینان ماتریسی ضرب می کنیم که دو سطر برابر دارد و طبق قضیه ۷، دترمینان این ماتریس صفر است و $\lambda \times ۰ = ۰$ خواهد شد.

مسئله:

ثابت کنید:

$$A = \begin{vmatrix} ۳a & ۴b & ۵a \\ ۳d & e & ۵d \\ ۳g & ۲h & ۵g \end{vmatrix} = ۰$$

حل: در ستون اول از ۳ و در ستون سوم از ۵ فاکتور می گیریم. خواهیم داشت:

$$|A| = ۳ \times ۵ \begin{vmatrix} a & ۴b & a \\ d & e & d \\ g & ۲h & g \end{vmatrix} = ۱۵ \times ۰ = ۰$$

مسئله:

ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲x^2 - ۲ & x^2 & x + ۱ \\ ۲x^2 - ۲ & x^2 & x^2 + x + ۱ \\ ۲x^2 - ۲ & x^2 & x^2 + x^2 + x + ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

حل: در ستون اول از $(x-۱)$ فاکتور می گیریم که

حاصل مضربی (۲ برابر) از ستون سوم می شود:

$$|A| = (x-1) \begin{vmatrix} 2(x+1) & x^2 & x+1 \\ 2(x^2+x+1) & x^2 & x^2+x+1 \\ 2(x^2+x^2+x+1) & x^2 & x^2+x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1) \times 0 = 0$$

مسأله:

ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

حل: (برای حل چنین مسائلی از یک طرف به طرف دیگر می رسیم). در دترمینان سمت راست، a در سطر اول و b در سطر دوم و c در سطر سوم ضرب می کنیم. سپس برای این که تغییری پدید نیامده باشد، کل دترمینان را بر abc تقسیم می کنیم. پس:

$$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix} \text{ سمت راست}$$

(حال به ترتیب از ستون های اول، دوم و سوم از a ، b و c فاکتور می گیریم)

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} \leftarrow \text{سمت چپ}$$

۸. اگر A و B و C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، به طوری که سطر (ستون) A مساوی با مجموع سطرهای (ستون های) B و C باشد و سایر سطرهای (ستون های) B و C برابر باشند، در این صورت داریم:

$$|A| = |B| + |C|$$

به عنوان مثال، اگر A و B و C سه ماتریس 3×3 باشند، می توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & e \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & f \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix}$$

(اثبات برای ماتریس های 3×3 به راحتی از محاسبه طرفین تساوی حاصل می شود).

اثبات: $|A|$ را بر حسب سطر i ام بسط می دهیم و محاسبه می کنیم. خواهیم داشت:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} = (b_{i1} + c_{i1})A_{i1} + \dots + (b_{in} + c_{in})A_{in} = (b_{i1}A_{i1} + \dots + b_{in}A_{in}) + (c_{i1}A_{i1} + \dots + c_{in}A_{in}) = |B| + |C|$$

مسأله:

بدون بسط ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حل: درایه های سطر اول را به صورت $[5+1 \quad 4+1 \quad 3+1 \quad 2+1]$ می نویسیم و از قضیه ۸ استفاده می کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

(در دترمینان سمت چپ، سطر سوم دو برابر سطر اول است و در دترمینان سمت راست، سطر دوم دو برابر سطر اول است.)

آزمون:

حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 4 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 8(2) & -8(1) \\ -1(4) & 0(3) \end{matrix}$$

حل: گزینه (۲) زیرا:

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 10 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (8)$$

$$= 0 + 0 + (8) = 8$$

(در دترمینان دوم جای دو ستون دوم و سوم عوض شده و دو دترمینان سوم و چهارم به صورت یک دترمینان نوشته شده است.)

۹. هرگاه مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (ستون) دیگری از A اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان A برابر است. به عنوان مثال، در ماتریس های 3×3 داریم: (سطر را با R و ستون را با C نمایش می دهیم.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{kR_r + R_r} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+kd & h+ke & i+kf \end{vmatrix}$$

(k برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه کرده ایم و دترمینان تغییر نمی کند.)

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی مربعی از مرتبه n

باشد. اگر k برابر سطر iام A را به سطر jام آن اضافه

کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می کنیم:

$$|A| = |B|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{سطر } i\text{ام} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{سطر } j\text{ام} & ka_{i1} + a_{j1} & \dots & ka_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{قضیه ۸}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 + |A| = |A|$$

مسئله:

ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حل: اگر هر سطر یا هر ستون را به دو سطر (یا دو ستون) بعد یا قبل از خودش بیفزاییم، مضربی از سطر (یا ستون) بین آن ها به دست می آید:

$$|A| \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{vmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 24 & 22 & 20 & 18 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0$$