

شاعر خطه‌ی خراسان ریاضی‌دان و

سه یار دبستانی

در نیمه‌ی دوم قرن پنجم هجری قمری، سه جوان ایرانی که هر یک شاگردی ممتاز بود، هم‌زمان در محضر یکی از بزرگ‌ترین فرزندان خراسان،

فقیه بزرگ عصر، امام موفق نیشابوری، درس می‌خواندند.

این سه جوان، نظام‌الملک،

حسن بن صباح و عمر خیام، دوستانی یکدل و یکرنگ بودند. اعتقاد بر

این بود که شاگردی که

در مکتب امام

تحصیل کند،

نیک‌بخت و

نیک‌فرجام

خواهد شد. از همین

روی، روزی حسن به دوستان خویش پیشنهاد کرد که هر سه تن پیمان ببندند، اگر هر یک به مقام و منصب والایی رسید، مراتب فضل و برتری را منحصرأ از آن خود نداند و دویار دیگر را نیز به تساوی از آن بهره‌مند کند. با گذشت زمان، معلوم شد که بخت بلند با نظام‌الملک یار بوده است، چرا که او وزیر سلطان آلبرسلان شد.

در این زمان، دویار دیگر هم مکتبی نظام‌الملک، نزد او شتافتند و بنا بر میثاقی که در دوران تحصیل بسته بودند، خواستار سهم خویش شدند!

حسن صباح،

نقاصای

منصبی دیوانی

کرد که بنا به

استدعای

وزیر، سلطان

سلجوقی آن را به او تفویض کرد. اما وی که شخصی خودخواه و ناسپاس بود، بر آن شد که دوست خود نظام‌الملک را از مقام صدارت به زیر کشد و جانشین او شود. ولی سرانجام پس از بر ملا شدن خیانت، مورد غضب واقع و تبعید شد.

اما عمر خیام نه مقامی می‌خواست و نه عنوانی. تنها خواسته‌اش این بود که به او رخصت داده شود تا در پناه و سایه‌ی وزیر بتواند به اشاعه‌ی علم و ریاضیات پردازد و به پاس این نعمت، برای دوام عمر و سعادت دوست خویش دست به دعا بردارد. وزیر که سخت تحت تأثیر فروتنی و اخلاص هم‌مکتبی سابق خود قرار گرفته بود، برای او مقرری سالانه تخصیص داد.

حسن صباح پس از تحمل دربه‌دری و بدبختی‌های بسیار، رهبر فرقه‌ای متعصب مذهبی شد که در سال ۴۸۳ هجری قمری بر قلعه‌ی الموت، واقع در کوهستان‌های مرتفع جنوب دریای خزر تسلط یافتند.

برخلاف زندگی پرآشوب حسن صباح، زندگی خیام با آرامش و سادگی توأم بود. وی در طول سال‌ها عمر مسالمت‌آمیز خویش، خدمات ارزنده‌ای به ادبیات و فرهنگ علمی آن عصر کرد.



چکیده

مقاله‌ی حاضر، به یکی از دستاوردهای برجسته‌ی ریاضی این اندیشمند پژوهشگر (دستاوردی که در زمره‌ی لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات^۱ قرار می‌گیرد) اختصاص یافته است. نخست برای روشن‌تر شدن موضوع، اندکی درباره‌ی مقدمات آن سخن می‌گوییم.

کلیدواژه‌ها: خیام، ریشه‌ی معادله،

چندجمله‌ای حقیقی، ریشه‌های حقیقی مثبت.

مفهوم معادله و حل آن

منظور از معادله‌ی چند جمله‌ای حقیقی با یک مجهول x هر معادله‌ای به شکل زیر است:

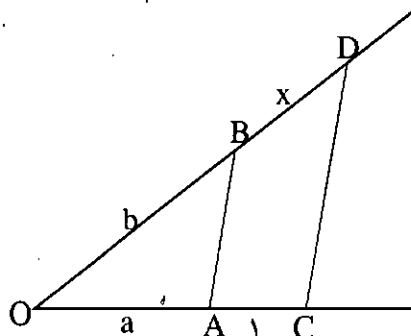
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت و $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی با شرط $a_n \neq 0$ هستند. هر مقدار x که در معادله صدق کند، ریشه‌ی آن معادله خوانده می‌شود. یکی از هدف‌های اصلی دانش جبر در آغاز پیدایش، آن بود که روش‌های کلی برای به دست آوردن ریشه‌های این گونه معادلات را بیابد. این کار را حل کردن معادلات می‌نامیدند. چون در آن روزگار تنها اعداد شناخته شده، اعداد مثبت حقیقی بودند، طی صدها سال، حل کردن معادله، به مفهوم یافتن ریشه‌های حقیقی مثبت آن معادله بود؛ در صورتی که ریشه‌ای می‌داشت. معادلات بر حسب این که درجه‌ی آن‌ها مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و... باشد، به ترتیب معادلات خطی، درجه دو، درجه سه، درجه چهار، درجه پنج و... نامیده می‌شوند.

امروزه مشکلی در راه حل معادله‌ی خطی وجود ندارد، زیرا می‌توان آن را از راه هندسی یا جبری به راحتی حل کرد.

معادلات درجه اول و درجه دوم

اگر یک معادله‌ی چند جمله‌ای خطی با یک مجهول x یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد، می‌توان این معادله را همواره به شکل $ax=b$ نوشت که در آن a و b هر دو عددهای مثبت اند. ریشه‌ی معادله از راه جبری $x = \frac{b}{a}$ و از راه هندسی عبارت است از چهارمین جزء تناسبی که سه پاره خط به طول‌های a ، b و ۱ سه جز دیگر آن هستند. به این معنی که $\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$ و مقدار x را می‌توان از شکل ساده‌ی زیر توسط پرگار یا خط کش مشخص کرد. در این شکل، COD زاویه‌ای دلخواه است و $OA=a$ ، $OB=b$ و $AC=1$ و CD موازی AB رسم شده است.



(شکل ۱)

جالب توجه است که مصریان عهد باستان، معادلات خطی را به شیوه‌ای حل می‌کردند که بعدها در اروپا به عنوان قاعده‌ی تصحیح و خطا^۲ معروف شد. بنا بر این شیوه، برای حل معادله‌ی $x + \frac{x}{v} = 24$ باید از قاعده‌ای که در پی می‌آید، استفاده کرد. فرض کنیم، x معادل مقداری دلخواه باشد؛ مثلاً $x=7$ که به ازای آن مقدار $x + \frac{x}{v}$ مساوی ۸ می‌شود نه ۲۴. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا عدد مطلوب یعنی ۲۴ به دست آید، مقدار واقعی x باید از رابطه‌ی $3(7)=21$ حاصل شود. نکته‌ی شایان تأمل این است که از یک حدس محض، پاسخ صحیح به دست آمده است.

هر چند که حالات معادلات درجه دوم مشکل‌تر از مورد معادلات خطی است، ریاضی دانان روزگار قدیم، این مورد را نیز، هم از راه هندسه و هم از راه جبر حل می‌کردند. راه حل جبری، اعم از این که به روش مربع کامل کردن یا به روش جای‌گزینی در فرمول کلی ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم صورت گیرد، باید برای تمام کسانی که مقدمات جبر را در درس‌های دوران مدرسه فرا گرفته‌اند، آشنا باشد. بابلی‌ها در تقریباً ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، شیوه‌های مشابهی را برای راه حل جبری هر دو معادله‌ی مذکور می‌شناختند.

معادلات درجه سوم و راه حل خیام

مورد معادلات درجه سوم به مراتب دشوارتر از دو مورد یاد شده است. البته بابلی‌ها برخی معادلات درجه سوم خاص را به کمک یک جدول حاوی مقادیر n^2+n^3 نظیر مقادیر n حل می‌کردند و بنا بر آن چه در یکی از آثار به جا مانده از ارشمیدس آمده است، این ریاضی دان یونانی از شرایطی بحث می‌کند که تحت آن، یک معادله‌ی درجه سوم ممکن است ریشه‌ی مثبت و حقیقی داشته باشد.

بحث در این باره، در دوره‌های بعد نیز ادامه یافت تا این که در قرن شانزدهم، یک ریاضی دان ایتالیایی، سرانجام راه حل جبری کلی برای معادلات درجه سوم ارائه داد. با این حال، در حدود پانصد سال پیش از این واقعه، شاعری ریاضی دان از اهالی ایران، موسوم به عمر خیام، یک راه حل هندسی برای معادلات درجه سوم یافت. این همان لحظه‌ی مهم در تاریخ ریاضیات است که در بالا بدان اشاره شد و حال پس از ذکر

مقدماتی چند درباره‌ی تاریخچه‌ی آن، به بحث در مورد راه حل خیام خواهیم پرداخت:

دوران بین نیمه‌ی قرن پنجم تا قرن یازدهم میلادی، به قرون تاریک اروپا مشهور است، زیرا طی این دوره، آموزش و تمدن در اروپای غربی تا سطح بسیار نازلی افول کرد. از سوی دیگر در این دوران، امپراتوری اسلامی به نقطه‌ی اوج ترقی خود رسید. در طول یک دهه پس از هجرت حضرت محمد(ص) از مکه به مدینه در سال ۶۲۳ میلادی، قبایل بادیه‌نشین پراکنده و از هم گسیخته‌ی شبه جزیره‌ی عربستان، به برکت شور و شوق ناشی از مذهبی مقتدر، در قالب امت قدرتمندی متحد شدند. پس از گذشت یک قرن از هجرت، حکومت ستاره و هلال مسلمانان در قلمروی وسیع از هند تا سرتاسر ایران، بین النهرین، آفریقای شمالی و اسپانیا گسترده شد.

یکی از کارهای مهم در حفظ بخش بزرگی از میراث فرهنگ جهانی، تلاش خستگی‌ناپذیر و مجدانه‌ی مسلمانان در بارور کردن دستاوردهای علمی و تحقیقی یونانیان و هندیان بود. در ضمن این فعالیت‌ها، بسیاری از آثار هندی و یونانی در زمینه‌های پزشکی، نجوم و ریاضیات، با جدیت تمام به زبان عربی ترجمه شدند. بدین ترتیب، این آثار مدت‌ها از دستبرد حوادث زمانه در امان ماند تا این که بعدها دانشمندان اروپایی توانستند آن‌ها را بار دیگر به زبان لاتین و سایر زبان‌های اروپایی برگردانند. اما اگر فعالیت‌های مجدانه‌ی پژوهشگران اندیشمند اسلامی نبود، بسیاری از علوم یونانی و هندی در خلال دوران طولانی قرون تاریک، به گونه‌ای جبران‌ناپذیر از میان می‌رفت. مسلمانان نه تنها پاس‌داران شایان تحسین بسیاری از سرمایه‌های فکری و معنوی قلمداد می‌شوند، بلکه توانستند خود نیز بر غنای آن‌ها بیفزایند. از جمله کارهای بسیار اصیل و ارجمند در این زمینه، ارائه‌ی راه حل هندسی معادلات درجه سوم توسط عمر خیام بود.

عمر خیام (که در نیمه‌ی دوم قرن چهارم و نیمه‌ی اول قرن پنجم هجری قمری می‌زیست)، شاعر، منجم و ریاضی‌دان ایرانی بود که در نیشابور زاده و دانش آموخته شد. اما شهرت خیام نزد مردم جهان غرب که به او سخت مهر می‌ورزند، بیشتر ناشی از رباعیات نغز اوست که توسط شاعر دل‌باخته‌ی ایرلندی، ادوارد فیتز جرالده، به گونه‌ای استادانه و شیوا به انگلیسی ترجمه شده است. عمر خیام در جهان علم نیز شهرت دارد؛ چه او توانسته است تقویم را به خوبی اصلاح و تقویم

جلالی را تدوین کند. برخورد انتقادی او نسبت به اصل توازی اقلیدس نشان می‌دهد که خیام در این باره، مقدم بر ساکری است که ایده‌ی او سرانجام به آفرینش هندسه‌ی نااقلیدسی منجر شد. از این‌ها گذشته، خدمت برجسته‌ی او به جهان علم و جبر دنیای اسلام، این بود که برای حل همه‌ی معادلات درجه سوم-یافتن ریشه‌های مثبت این معادلات-راه حل هندسی ارائه داد.

برای نشان دادن شیوه‌ی ابداعی عمر خیام از معادله‌ی درجه سوم خاص، یعنی معادله‌ی $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ کمک می‌گیریم که در آن a ، b ، و c به عنوان طول‌های چندپاره خط فرض شده‌اند. خیام این نوع معادله‌ی درجه سوم را با اصطلاحات خاص آن دوره، چنین

مطرح می‌کند: «یک مکعب، چند ضلع و چند عدد که مساوی چند مربع هستند.»

اما مسئله‌ی مذکور از

نظر هندسی این طور بیان می‌شود: به فرض داشتن

یک پاره خط واحد و چند پاره خط a ، b و c ، پاره خط

x را چنان بکشید که رابطه‌ی بالا بین a ، b ، و c برقرار باشد.

هدف آن است که تا سر حد امکان،

پاره خط x تنها با استفاده از خط کش و پرگار رسم شود. یافتن یک راه حل صرفاً متکی به استفاده از خط کش و پرگار به طور کلی ناممکن است؛ چه در قسمتی از کشیدن شکل باید مجاز باشیم از منحصرأ یک مقطع مخروطی خاص مفروض استفاده کنیم.

یک راه اساسی ترسیم شکل که چندین بار در حل معادله‌ی درجه سوم به کار گرفته شده، منوط به آن است که چهارمین جزء از تناسبی را بیابیم که سه پاره خط مفروض، سه جزء معلوم آن باشند. این یک مسئله‌ی قدیمی است که راه حل آن بر یونانیان عهد باستان معلوم بوده است.

فرض کنیم u ، v و w سه پاره خط معین باشند و ما بخواهیم طول پاره خط x را طوری تعیین کنیم که $\frac{u}{v} = \frac{w}{x}$ باشد. شکل ۲ که شبیه شکل ۱ است، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با کمک خط کش و پرگار، پاره خط x مورد نظر را رسم کرد.

یکی از کارهای مهم
در حفظ بخش بزرگی از
میراث فرهنگ جهانی، تلاش
خستگی‌ناپذیر و مجدانه‌ی
مسلمانان در بارور کردن
دستاوردهای علمی و
تحقیقی یونانیان و
هندیان بود

A diagram of a triangle with a line segment parallel to the base. The top vertex is labeled 'x'. The base is divided into segments 'H' and 'W'. The left side is labeled 'v'.

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) \quad (1)$$

حال دنبال‌ه‌ی راه‌حل هندسی معادله‌ی درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ عمر خیام را شرح می‌دهیم: نخست با استفاده از راه اساسی ترسیم شکل، پاره خط z را چنان می‌یابیم که $\frac{b}{a} = \frac{a}{z}$ باشد. سپس بار دیگر با استفاده از راه اساسی ترسیم

$$(BG)(ED) = (BE)(AB) \quad (2)$$

شکل، پاره خط m را چنان می یابیم که $m = \frac{a^2}{b^2}$ باشد. حال در

$$\begin{aligned} (EK)(KJ) &= (EM)(MH) = \\ (BG)(ED) &= (BE)(AB) \end{aligned} \quad (2)$$

حل: شکل $AB = m = \frac{a^2}{b^2}$ و $BC = c$ را رسم می کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned}(\text{BL})(\text{LJ}) &= (\text{EK})(\text{BE} + \text{KJ}) = \\&= (\text{EK})(\text{BE}) + (\text{EK})(\text{KJ}) = \\&= (\text{EK})(\text{BE}) + (\text{AB})(\text{BE})(\mathfrak{r}) = \\&= (\text{BE})(\text{EK} + \text{AB}) = (\text{BE})(\text{AL})\end{aligned}\quad (\mathfrak{r})$$

نیم دایره‌ای به قطر AC می‌کشیم و از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در D قطع کند. سپس روی BD، مقدار $BE = b$ را جدا می‌کنیم و از E خط EF را موازی AC می‌کشیم. باز با توجه به راه اساسی ترسیم شکل، G را روی BC چنان

واز آنجا: $(BL)^T(LJ)^T = (BE)^T(AL)^T$

اما با توجه به هندسه ی مقدماتی داریم:

می یابیم که $\frac{ED}{BE} = \frac{AB}{BG}$ باشد و مستطیل DBGH را

$$(LJ)^{\dagger} = (AL)(LC) \quad (5)$$

بنابراین، از رابطه های ۴ و ۵ نتیجه می گیریم:

کامل می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، یک هذلولی قائم‌الزاویه H را از ED و EF که خطوط مجانب آن باشند (به این معنی که معادله‌ی هذلولی گذرنده بر نقطه‌ی H نسبت به محورهای ED و EF به عنوان محور طول و ED به عنوان محور y ، به شکل $xy = a$ باشد که a عدد ثابت است).

$$(\text{BE})^{\text{r}}(\text{AL}) = (\text{BL})^{\text{r}}(\text{LC}) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} (\text{BE})^T (\text{BL} + \text{AB}) = (\text{BL})^T (\text{BC} - \text{BL})$$

با قرار دادن $BE = b$ ، $AB = \frac{a^2}{b}$ و $BC = C$ در رابطه ی ۶ داریم:

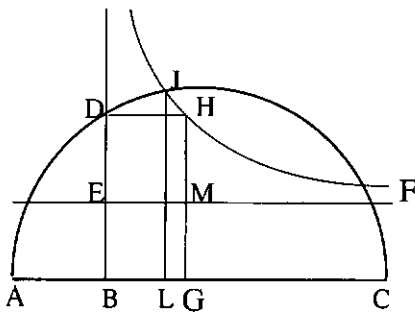
$$b^r(BL + \frac{a^r}{b^r}) = (BL)^r(C - BL) \quad (V)$$

بایست آخرین معادله در رابطه ی ۷ و مرتب کردن جمله ها داریم:

$$(\mathbf{BL})^r + \mathbf{b}^r (\mathbf{BL}) + \mathbf{a}^r = \mathbf{C}(\mathbf{BL})^r \quad (\Lambda)$$

و از این جا $BL = X$ یعنی یک ریشه ی معادله ی درجه سوم مفروض به دست می آید.

باید اذعان کرد که روش خيام ماهرانه و بدیع است و ضرورت ايجاب می کند که هر معلم دبیرستان بتواند علاقه ی برخی از دانش آموزان خود را نسبت به آن برانگیزد. ترسیم



(شکل ۳)

نقطه به نقطه‌ی هذلولی (با استفاده از ترسیم در حالت کلی شکل) کار آسانی است، زیرا اگر N هر نقطه‌ای روی EF باشد و اگر عمود بر EF از نقطه‌ی N ، هذلولی را در p قطع کند، داریم:

$$(EM)(MH) = (EN)(NP)$$

و از آنجا $\frac{EN}{EM} = \frac{MH}{NP}$ و NP چهارمین پاره خط متناسب با پاره خط‌های مفروض EN ، EM و MH است.

به این ترتیب، نخست می‌توان تعدادی از نقطه‌های روی هذلولی را مشخص کرد و سپس با ترسیم یک منحنی بر نقاط به دست آمده، هذلولی را کامل کرد. ممکن است معادله‌ی درجه سوم $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد. در این جا $a = 2$ ، $b = \sqrt{2}$ و $c = 5$ است. سه ریشه‌ی این معادله عبارت‌اند از: 2 ، 4 و -1 . دانش‌آموزان باید بتوانند ریشه‌ی مثبت معادله را به روش خیام بیابند. شاید آن‌ها بتوانند با مختصر تعمیم این روش، ریشه‌ی منفی را هم به دست آورند.

حل این مسئله می‌تواند برای یک طرح تحقیقاتی عالی برای دانش‌آموزان سال سوم، سرآغاز خوبی باشد.

عمر خیام در سال ۵۱۵ یا ۵۱۷ هجری قمری در نیشابور درگذشت. یکی از شاگردان وی موسوم به نظامی سمرقندی، نقل کرده است که برحسب معمول، او با استادش (خیام) در باغی به

گفت‌وگو می‌نشست و خیام در یکی از این جلسات به او گفته بوده است که آرزو دارد مدفنش در نقطه‌ای بنا

شود که باد شمال برگ‌های گل سرخ را بر آن بگستراند. چند

سال بعد از این گفت‌وگو که خیام جهان را به درود گفته بود، شاگردش به نیشابور می‌رود و پس از یافتن آرامگاه خیام، درمی‌یابد که قبر او درست در مجاورت باغی قرار گرفته و شاخه‌ی درختان میوه از دیوارهای باغ به طرف خارج سرازیر شده و شکوفه‌های گل‌های آن‌ها آن قدر بر آرامگاه استاد فرو ریخته‌اند که سنگ مزارش را کاملاً پوشانیده‌اند.

وقتی ادوارد فیتز جرالده - شاعر ایرلندی

دل‌باخته‌ی رباعیات خیام که خیام شاعر را به اروپا

شناساند - در سال ۱۸۸۳ درگذشت، در یک کلیسای کوچک انگلیسی در سفلوک به خاک سپرده شد. ویلیام سیمپسون، هنرمند تصویرگر یکی از نشریات لندن، در سال ۱۸۸۴ به نیشابور رفت و از آرامگاه خیام دیدن کرد. در کنار سنگ

مزار او چندین بوته گل سرخ یافت و مقداری از تخم آن‌ها را که بر شاخه مانده بود، چید و آن‌ها را در بازگشت به انگلستان آورد. سیمپسون تخم گل‌ها را به مسئول «باغ‌های گیاه‌شناسی کیو» سپرد و او پس از کاشتن آن‌ها

موفق

شد، بوته‌های

گل سرخ به عمل

آورد. در ۷ اکتبر

۱۸۹۳ یکی از

این بوته‌های

گل، به آرامگاه

فیتز جرالده منتقل و در آن‌جا

کاشته شد.



پی‌نوشت.....
۱. این نشان عثمانی‌ها و ترکیه‌ی فعلی است که البته از قرن ۱۶ میلادی پرچم عثمانی‌ها بوده است، نه در قرن‌های اول یا دوم هجری.
۲. ادوارد فیتز جرالده ایرلندی، مترجم رباعیات خیام، در مقدمه‌ای که به زبان انگلیسی بر این کتاب نگاشته است، صحت انتساب این روایت افسانه‌آمیز به خیام را تأیید می‌کند - م.
۳. پروفیسور هاور ایوز (نگارنده‌ی این مقاله)، استاد برجسته‌ی معاصر و صاحب‌نظر در تاریخ ریاضیات و هندسه، مجموعه سخن‌رانی‌های خویش را در دو کتاب به نام‌های «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات قبل از سال ۱۶۵۰» و «لحظه‌های مهم در تاریخ ریاضیات بعد از سال ۱۶۵۰» تنظیم و منتشر کرده است. مقاله‌ی حاضر، از کتاب نخست انتخاب و ترجمه شده است.
۴. «قاعده‌ی تصحیح و خطا» یا rule of false position در واقع روشی است برای تخمین زدن ریشه‌های یک معادله‌ی جبری و تعیین کمیت نزدیک به صحت. (م.)

منبع:

Eves, Howard, Great Moments in Mathematics Before 165۰, Washington, D.C. The Mathematical Association of America, 1983.

برخورد انتقادی
خیام از اصل توازی
اقلیدس نشان می‌دهد که
او در این باره، مقدم بر
ساکری است که ایده‌ی او
سرانجام به آفرینش
هندسه‌ی ناقلیدسی
منجر شد