

حل یک مسئله جالب هندسه

به کمک تابع همنگار (هموگرافیک)

● دکتر احمد شرف الدین

خلاصه. در این مقاله دربارهٔ تابع همنگار (هموگرافیک) توضیحاتی بیان می‌کنیم. سپس به کمک تابع همنگار یک مسئله بسیار جالب هندسه را حل می‌کنیم. در پایان مقاله حالت‌های خاص از مسئله را مطرح می‌کنیم.

۱. تابع همنگار

۱.۱. تابع

$$(1) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی‌اند تابع همنگار نامیده می‌شود. دامنه تغییرات x عبارت است از $R - \{-\frac{d}{c}\}$ و دامنه تغییرات y عبارت است از $R - \{\frac{a}{c}\}$.

۱.۲. اگر یک رابطه جبری بین دو متغیر حقیقی x و y برقرار باشد بطوری که به ازای هر مقدار x یک و فقط یک مقدار برای y حاصل شود و به ازای هر مقدار y یک و فقط یک مقدار برای x حاصل شود در این صورت آن رابطه به صورت زیر است (دقت به این نکته ضروری است که x و y نباید هیچ مقدار مختلطی اختیار کنند یا به عبارت دیگر رابطه جبری بین x و y نباید به ازای مقادیر غیر حقیقی برقرار باشد):

$$(2) \quad Axy + Bx + Cy + D = 0$$

رابطه (۲) یک رابطه همنگار به صورت (۱) می‌باشد.

باید توجه داشت که در رابطه (۲)، دو متغیر x و y از درجه اول‌اند. برای توضیح بیشتر مثال‌هایی ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $y = \sqrt{x}$ یک تابع جبری یک به یک است. اما در این تابع متغیر x نمی‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند (x فقط اعداد نامنفی اختیار می‌کند) و همین‌طور y نمی‌تواند مقدار منفی اختیار کند.

مثال ۲. تابع $y = x^2$ یک تابع جبری یک به یک است. اما به ازای هر مقدار y (بجز صفر) برای x سه مقدار متمایز حاصل می‌شود که یکی حقیقی و دو دیگر مختلط است. مثلاً اگر $y = 1$ باشد برای x سه

$$\text{مقدار } x_1 = 1 \text{ و } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ و } x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

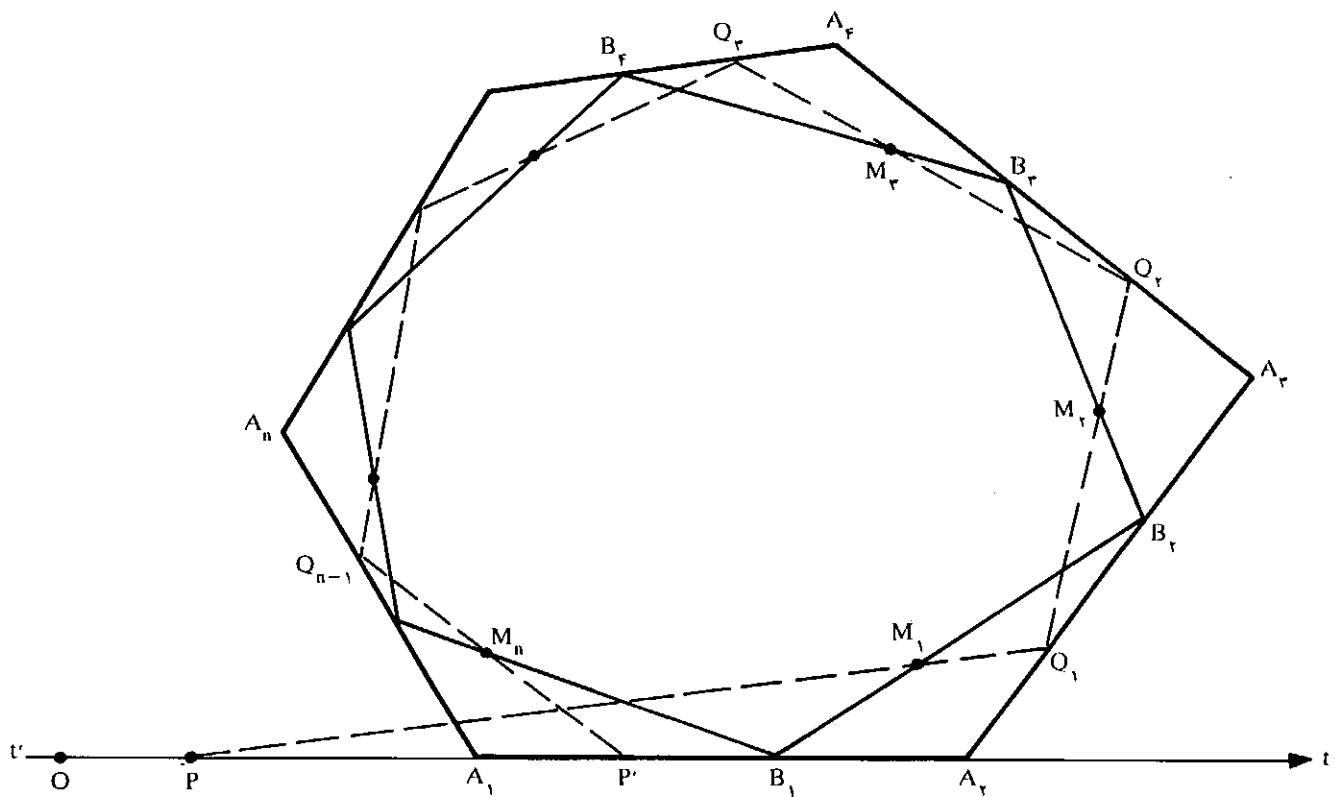
حاصل می‌شود. (این سه مقدار جوابهای معادله $x^3 - 1 = 0$ اند.)

تبصره. توجه داشته باشید که در شماره (۲.۱) گفته‌ایم دو متغیر x و y حقیقی‌اند بطوری که به ازای هر مقدار x ... و به ازای هر مقدار y ...

۲. یک مسئله جالب هندسه

در صفحه π ، n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ و n نقطه $M_1, M_2, \dots, M_n$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1B_2 \dots B_n$ در n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ محاط کنیم بطوری که رأسهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ و B_n به ترتیب بر خط‌های $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ قرار گیرند.

حل. محور $t't'$ را منطبق بر خط A_1A_2 اختیار می‌کنیم و مبدأ آن را Q می‌نامیم. نقطه دلخواه P را روی محور $t't'$ در نظر می‌گیریم. خط راست Pm_1 را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_2A_3 نقطه Q_1 می‌نامیم. سپس خط راست Q_1M_2 را رسم می‌کنیم و نقطه



برخورد آن را با خط $A_n A_{n-1}$ نقطه Q_{n-2} می‌نامیم و ...
حال قرار می‌دهیم:

$$\overline{OP} = x \quad \text{و} \quad \overline{OP'} = y$$

چون به ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از همان محور حاصل می‌شود و برعکس پس یک رابطه

$$(۳) \quad f(x, y) = 0$$

بین x و y وجود دارد که یک به یک است.

حال ثابت می‌کنیم که معادله (۳) یک معادله جبری است. برای این منظور یک دستگاه مختصات $xO'y$ در نظر می‌گیریم و ابتدا با معلوم بودن مختصات نقطه‌های P, M_1, A_1, A_2 معادله‌های دو خط PM_1 و $A_1 A_2$ را می‌نویسیم. دستگاه حاصل از معادله‌های این دو خط مختصات نقطه Q_1 را به دست می‌دهد. چون معادلات خط‌های راست جبری‌اند و اعمالی که روی آنها انجام می‌گیرد تا مختصات نقطه برخورد آن دو خط به دست آید جبری‌اند پس Y_{Q_1} برحسب X_{Q_1} با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

حال با معلوم بودن مختصات نقاط Q_1, M_2, A_2, A_3 معادله‌های دو خط $Q_1 M_2$ و $A_2 A_3$ را می‌نویسیم و به کمک معادلات این دو خط مختصات نقطه برخورد آنها یعنی نقطه Q_2 را حساب می‌کنیم. با بکارگیری همان استدلال قبل می‌گوییم که Y_{Q_2}

برخورد آن را با خط $A_2 A_3$ نقطه Q_2 می‌نامیم. بعد خط راست $Q_2 M_3$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_3 A_4$ نقطه Q_3 می‌نامیم و این عمل ترسیمات متوالی را ادامه می‌دهیم تا به نقطه Q_{n-1} واقع بر خط $A_n A_1$ برسیم. اکنون خط راست $Q_{n-1} M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_1 A_2$ نقطه P' می‌نامیم. اکنون توجه خود را به دو نکته مذکور در زیر متمرکز می‌کنیم.

الف. اگر روی محور $t't$ ، نقطه P را در جایی انتخاب کنیم تا نقطه P' حاصل از ترسیمات متوالی بر نقطه P منطبق شود آنگاه خط شکسته بسته $PQ_1 Q_2 \dots Q_{n-1} P'$ همان چند ضلعی محاطی مطلوب $B_1 B_2 \dots B_m$ می‌باشد.

ب. با اجرای ترسیمات متوالی مذکور، به ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از محور $t't$ حاصل می‌شود و برعکس به ازای هر نقطه P' از محور $t't$ با اجرای ترسیمات متوالی مذکور در جهت عکس، یک و فقط یک نقطه P از محور $t't$ حاصل می‌شود. (منظور از اجرای ترسیمات در جهت عکس آن است که یک نقطه دلخواه P' روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و سپس خط $P' M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_1 A_n$ تعیین می‌کنیم و آن نقطه را Q_{n-1} می‌نامیم. سپس خط $Q_{n-1} M_{n-1}$ را رسم می‌کنیم و نقطه

می‌گیریم. زوجهای مرتب $(\overline{OP}, \overline{OP'})$ ، $(\overline{OP_1}, \overline{OP'_1})$ و $(\overline{OP_p}, \overline{OP'_p})$

باید در معادله (۵) صدق کنند. در معادله (۵) به جای x و y به ترتیب مختص اول و مختص دوم هریک از سه زوج مرتب اخیرالذکر را می‌گذاریم. سه معادله حاصل می‌شود. از حل دستگاه حاصل از سه معادله مورد نظر مقایر Q, P ، و R حاصل می‌شود. مقادیر حاصل را به ترتیب P_1, Q_1, R_1 می‌نامیم. معادله (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(V) \quad y = \frac{P_1 x + Q_1}{R_1 x + 1}$$

اکنون یادآور می‌شویم که هدف، آن بود که نقطه P را روی محور $t't$ جایی انتخاب کنیم تا نقطه P' بر آن منطبق شود. با توجه به نکته اخیرالذکر هنگامی که دو نقطه P و P' برهم قرار گیرند مقدار $\overline{OP} = u$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(A) \quad u = \frac{P_1 u + Q_1}{R_1 u + 1}$$

جوابهای این معادله مواضع نقطه مطلوب P را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند. جوابهای این معادله مواضع نقطه B_1 را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند.

تبصره. می‌توان با معلوم بودن سه نقطه P, P_1, P_p و سه نقطه نظیر آنها یعنی P', P'_1, P'_p و موضع نقطه B_1 را با ترسیم هندسی مشخص کرد (یعنی بدون نوشتن سه معادله برای تعیین P_1, Q_1, R_1). تبصره. مسئله مذکور در شماره (۲) را می‌توان به صورت کلیتر زیر مطرح کرد.

در صفحه π ، خط راست $d_1, d_2, \dots, d_p$ و d_n نقطه M_1 ، $M_2, \dots, M_n$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1, B_2, \dots, B_n$ رسم کنیم. بطوری که رأسهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ به ترتیب بر خطهای $d_1, d_2, \dots, d_p$ و d_n قرار گیرند. چون در مسئله اخیرالذکر بخشی از مجموعه خطوط $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ می‌توانند موازی و یا متقارب باشند مسئله کلیتر می‌شود.



بر حسب X_{Q_1} با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

به همین ترتیب معادلات زوجهای خطوط مناسب را می‌نویسیم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم تا سرانجام مختصات نقطه P' بدست آید. چون معادلات خطوط جبری‌اند و اعمالی که برای بدست آوردن مختصات نقاط برخورد آنها انجام می‌گیرد جبری‌اند پس y (یعنی اندازه جبری $\overline{OP}$ روی محور $t't$) بر حسب x (یعنی اندازه جبری $\overline{OP'}$ روی محور $t't$) با یک عبارت جبری بیان می‌شود. از مطالب اخیرالذکر نتیجه می‌شود که:

(I) یک رابطه جبری بین x و y وجود دارد.

از نکته مذکور در (ب) نتیجه می‌شود که:

(II) رابطه بین x و y یک به یک است.

اکنون توجه کنیم که نقطه P می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط $Q_{n-1} M_n$ موازی محور $t't$

می‌شود. این نقطه را K و اندازه جبری OK را k می‌نامیم. همین‌طور نقطه P' می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط $Q_1 M_p$ موازی محور $t't$ می‌شود. این نقطه را L و اندازه جبری OL را l می‌نامیم. از مطالب اخیرالذکر که نتیجه می‌شود که:

x و y می‌توانند به ترتیب هر عدد از دو مجموعه $R - \{k\}$ و $R - \{l\}$ را اختیار کنند و هیچ مقدار مختلطی اختیار نمی‌کند. (III)

از سه نکته، (I)، (II)، (III) نتیجه می‌شود که رابطه بین x و y به صورت زیر است:

$$(F) \quad Axy + Bx + Cy + D = 0$$

به عبارت دیگر y بر حسب x یک تابع همگرا به صورت زیر است:

$$(B) \quad y = \frac{px + q}{rx + s}$$

صورت و مخرج کسر (۵) را به یکی از چهار پارامتر p, q, r, s یا s بخش می‌کنیم مثلاً بر s و قرار می‌دهیم $\frac{p}{s} = P$ و $\frac{q}{s} = Q$ و $\frac{r}{s} = R$ و معادله (۵) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(V) \quad y = \frac{Px + Q}{Rx + 1}$$

اکنون به تعیین مقادیر P, Q, R می‌پردازیم. برای این منظور سه نقطه دلخواه P, P_1, P_p و P' را بطور دلخواه روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و نظیرهای این سه نقطه را که پس از اجرای ترسیمات یاد شده، روی محور $t't$ حاصل می‌شوند به ترتیب P', P'_1, P'_p می‌نامیم. اندازه‌های جبری $\overline{OP}, \overline{OP'}, \overline{OP_1}, \overline{OP'_1}, \overline{OP_p}, \overline{OP'_p}$ را اندازه