

حل معادله همبشتی^۱ به توسط جدول

(برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی)

رشته ریاضی



در معادله همبشتی:

$$ax \equiv c \quad (1)$$

عدد n را سنج یا پیمانه یا هنگ (mod) ، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت همبشتی می نامیم.

می دانیم با فرض $(a, n) = 1$ و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در همبشتی):

$$a^{-1} \cdot a \equiv 1$$

معادله (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} x &\equiv a^{-1} \cdot c \\ x &= kn + a^{-1} \cdot c \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

بنابراین برای حل معادله (۱)، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم.

می دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادله همبشتی زیر محاسبه می شود:

$$x_1 = a^{-1} ; \quad ax_1 \equiv 1 \quad (2)$$

در معادله (۲) اگر $a > n$ و r_1 باقیمانده حاصل تقسیم $a : n$ باشد، می توان نوشت:

$$r_1 x_1 \equiv 1 \quad (3)$$

معادله همبشتی (۳) را می توان به صورت معادله سیال زیر نوشت:

$$\begin{aligned} r_1 x_1 - nx_2 &= 1 \\ nx_2 - r_1 x_1 &= -1 \\ nx_2 &\equiv -1 \end{aligned} \quad (4)$$

۱. سازگاری، موافقت و تطبیق شیش با شیء دیگر) Congruence

مرحله (۱): تقسیمهای متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 1999 \overline{) 1378} \quad \text{و} \quad 1378 \overline{) 621} \\ 1378 \quad 1 \quad \quad \quad 1242 \quad 2 \\ \hline (621) \quad \quad \quad (136) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 621 \overline{) 136} \quad \text{و} \quad 3 \overline{) 2} \\ 544 \quad 4 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \\ \hline (77) \quad \quad \quad (1) \end{array}$$

مرحله (۲): عدد ثابت همنهشتیها را که به طور متناوب ۱ و -۱ است، از سمت چپ به راست در سطر دوم جدول (سطر c_i) می‌نویسیم.

مرحله (۳): از اولین باقیمانده (۶۲۱) تا آخرین باقیمانده (۱) را بار دیگر در سطر سوم (سطر a_i) نظیر سطر اول n_i می‌نویسیم.

مرحله (۴): آخرین خانه سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱ یا -۱) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اول با شرط $(a, n) = 1$ عدد ۱ ظاهر می‌شود و در نتیجه، عمل تقسیم به پایان می‌رسد.

برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکانها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$* \text{و} \dots = \frac{7(59)+1}{18} = 7 \text{ و } \frac{2(18)-1}{5} = 7 \text{ و } \frac{1(5)+1}{3} = 2 \text{ و } \frac{(1)3-1}{2} = 1$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت همنهشتی ضرب می‌کنیم:

$$\frac{242(1378)+1}{621} = 537 \quad 537(1357) = 728709 \equiv 1125 \pmod{1378}$$

به بیان دیگر، باقیمانده حاصل از تقسیم عدد $537(1357)$ یا 728709 بر 1378 ، جواب معادله همنهشتی است:

$$x = 1125 \text{ (جواب اصلی معادله)}$$

بدیهی است که جواب عمومی معادله، به ازای مقادیر صحیح دلخواه k ، چنین است:

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این که r_2 باقیمانده حاصل تقسیم $n : r_1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_2 x_2 \equiv -1 \pmod{r_1} \quad (5)$$

مطابق مرحله پیش معادله همنهشتی (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1 x_2 \equiv 1 \pmod{r_2} \quad (6)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله‌های پیش، به روش بازگشتی می‌توان x را حساب کرد. (توجه: تمام عملیات فوق را توسط یک جدول چهارسطری انجام می‌دهیم.) این جدول، دارای چهار سطر است که پس از چهار مرحله تکمیل می‌شود؛ به طور مثال، معادله همنهشتی $1357x \equiv 1378 \pmod{1999}$ را با استفاده از جدول حل می‌کنیم:

$x n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+ c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	(۵۳۷)	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱		

توجه: هر ستون جدول، یک معادله همنهشتی را مشخص می‌کند.

در این مثال چون $1378 > n = 1999$ ، پس باید باقیمانده تقسیم $n : a$ را حساب کرده و در دومین خانه سطر اول (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حل هر معادله همنهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a, n) = 1$ را بررسی کنیم. در معادله همنهشتی $ax \equiv c \pmod{n}$ ، اگر $(a, n) = d$ در این صورت، معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش پذیر باشد ($d | c$).

بنابراین، برای بررسی شرط $(a, n) = 1$ ، ابتدا همیشه تقسیمهای متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را به ترتیب، در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان دهنده این است که شرط $(a, n) = 1$ برقرار است، و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر، عددی بزرگتر از یک باشد، آن عدد بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و n است.

حل: ابتدا با تقسیمهای متوالی و درج باقیمانده‌ها، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۹۵۳ و ۲۶۸۰ را به دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	(۶۷)	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $(۲۶۸۰, ۳۹۵۳) = ۶۷$
چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش پذیر نیست، معادله دارای جواب نیست.

مثال (۴): معادله همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۱۳۷۸x \equiv ۷$$

حل: با تشکیل جدول معادله را حل می‌کنیم:

$$(۱۳۷۸ \equiv ۶۹)$$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	(-۲۹)	-۲۶	-۳	-۲	-۱	-۱	

یکی از جوابهای معادله از بی‌شمار جواب، چنین است:

$$x_1 = (-۲۹)(۷) = -۲۰۳$$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین ضریب مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$$x = ۳(۷۷) - ۲۰۳ = ۲۳۱ - ۲۰۳ = ۲۸$$

$$(x = ۲۸ \text{ (جواب اصلی)})$$

مثال (۵): معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانه ۴۱ را بیابید.

حل: این مسأله، معادل با همنهشتی زیر است:

$$۳۴x \equiv ۱$$

با تشکیل جدول، معادله را حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۴۱	۳۴	۷	۶	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۳۴	۷	۶	۱	
x_i	(-۶)	-۵	-۱	-۱	

با توجه به جدول، جواب $x_1 = -۶$ به دست می‌آید که

$$x = ۱۳۷۸k + ۱۱۲۵ \text{ (جواب عمومی معادله)}$$

مثال (۱): معادله همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۲۶x \equiv ۱۷$$

حل: چون $n = ۲۶ > a = ۱۹$ ابتدا باقیمانده حاصل از تقسیم $۱۹ \div ۲۶$ را در سمت راست سنج (۱۹) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اول جدول درج می‌کنیم:

$$۱ \equiv -۱۳۶ = ۱۷ \times (-۸)$$

با توجه به همنهشتی بالا، جواب اصلی مثبت معادله چنین است:

$$x = ۸(۱۹) - ۱۳۶ = ۱۵۲ - ۱۳۶ = ۱۶$$

$$(x = ۱۶)$$

$\times n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	(-۸)	-۳	-۲	-۱	

مثال (۲): وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانه ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسأله، معادله همنهشتی زیر است:

$$۱۹۹۹x \equiv ۱$$

چون $n = ۱۹۸۰ > a = ۱۹۹۹$ ، باقیمانده تقسیم $۱۹۸۰ \div ۱۹۹۹$ را در سمت راست پیمانه (۱۹۸۰) می‌نویسیم و سپس تقسیمهای متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله مورد نظر است، بنابراین، کافی است عدد سنج (۱۹۸۰) را به عدد (-۵۲۱) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

$$x = ۱۹۸۰ - ۵۲۱ = ۱۴۵۹$$

جواب:

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	(-۵۲۱)	-۵	-۱	-۱	

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانه ۱۹۸۰ عدد ۱۴۵۹ است.

مثال (۳): معادله همنهشتی زیر را از نظر وجود یا عدم جواب بررسی کنید.

$$۲۶۸۰x \equiv ۱۷۶$$

$$x_1 = 3(-2) = -6$$

$$x = 17 - 6 = 11$$

$$x = 11 ; y = 16$$

$x n_i$	۱۷	۸	۱
$+ c_i$	۱	-۱	
$\div a_i$	۸	۱	
x_i	(-۲)	-۱	

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادله (۱)، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم؛ زیرا اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ، یک جواب اختصاصی معادله باشد؛ در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases}$$

با فرض $(a, b) = 1$ ، از تفاضل دو معادله دستگاه، خواهیم داشت:

$$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$$

برای این که $y \in \mathbb{Z}$ ، لازم است که داشته باشیم:

$$\frac{x - \alpha}{b} = t \in \mathbb{Z} ; x = \alpha + bt$$

بنابراین، با فرض $t \in \mathbb{Z}$ ، جوابهای معادله (۱) از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at \quad (3)$$

بنابر معادله‌های (۳)، جواب عمومی معادله $25x - 17y = 3$ ، چنین است:

$$x = 11 - 17t, y = 16 - 25t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

مثال (۲): معادله سیال زیر را حل کنید.

$$1340x - 3953y = 469$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$$1340x \equiv 469 \pmod{3953} \quad (1)$$

حال باید حاصل (۱۳۴۰، ۳۹۵۳) را به دست آوریم:

$x n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+ c_i$	۱	-۱	۱	-۱	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می‌شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ باشند:

برای یافتن جواب مثبت، کافی است عدد سنج را به آن بیفزاییم.

$$x = 41 - 6 = 35 ; \quad \boxed{x = 35}$$

بنابراین معکوس عدد ۳۴ به پیمانه ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین

معادله‌های هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$1) \quad 441x \equiv 21 \pmod{273} \quad (x = 5 \text{ جواب})$$

$$2) \quad 79x \equiv 1 \pmod{9}$$

$$3) \quad 1378x \equiv -9 \pmod{1357}$$

$$4) \quad 1999x \equiv 2000 \pmod{2999}$$

$$5) \quad 1999x \equiv 1357 \pmod{1378} \quad (x = 1125 \text{ جواب})$$

$$6) \quad 1313x \equiv -26 \pmod{1027} \quad (x = 43 \text{ جواب})$$

توجه: این جدول، کاربردهای بسیاری دارد که در این جا به طور اختصار، کاربرد جدول را در حل معادله‌های سیال خطی تشریح می‌کنیم. از این جدول برای شناسایی اعداد اول و یافتن معادل عددهای توانی و... نیز می‌توان استفاده کرد.

حل معادله‌های سیال خطی چند مجهولی به کمک جدول $(ax + by + cz + \dots = d)$

معادله سیال دو مجهولی را به صورت عمومی زیر در نظر می‌گیریم:

$$(a, b) = 1 ; \quad ax + by = c \quad (1)$$

معادله (۱) را به صورت معادله هم‌نهشتی زیر می‌نویسیم:

$$(x, y \in \mathbb{Z}), \quad ax \equiv c \pmod{b} \quad (2)$$

اینک معادله (۲) را از طریق جدول حل کرده و از آن جا مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطه $y = \frac{c - ax}{b}$ ، مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال (۱): معادله سیال زیر را حل کنید.

$$25x - 17y = 3 \quad (1)$$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادله هم‌نهشتی زیر

می‌نویسیم:

$$25x \equiv 3 \pmod{17} \quad (2)$$

حال در این جا، معادله هم‌نهشتی (۲) را به توسط جدول

حل می‌کنیم:

$$x_1 = 7, \quad y_1 = 5$$

به همین ترتیب:

$$Z_2 = 2 : \quad 7x_2 + 11y_2 = 78 \quad ; \quad 7x_2 \equiv 78 \quad (3)$$

در این معادله همنهشتی، ضریب مجهول (x_2) برابر ۷ و پیمانه همنهشتی برابر ۱۱ مطابق با همنهشتی (۲) می باشد، بنابراین جواب معادله (۳) با توجه به جدول اخیر، چنین است:

$$x_2 = (-3)(78) = -234 \equiv 8, \quad y_2 = 2$$

معادله (۱) به ازای $Z_2 = 3$ و $Z_2 = 4$ جواب صحیح ندارد. پس، معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۷، ۵، ۱) و (۸، ۲، ۲) می باشد، که می توان با استفاده از این جواب های اختصاصی، جواب های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

تمرین

۱. با فرض $d = (399, 589)$ ، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$$399r + 589s = d$$

۲. معادله های سیال زیر را حل کنید.

$$1) \quad 7x + 5y = 19$$

$$2) \quad 10x + 86y = 500$$

$$3) \quad 4x + 3y - 5z = 2$$

$$4) \quad x + 2y + 3z + 4t = 10$$

$$5) \quad x - y + z - t + u = 1$$

$$(1340, 3953) = 67$$

از طرفی چون $7 = 67 \div 469$ ؛ بنابراین، معادله (۱) را می توان به ۶۷ ساده کرد:

$$20x \equiv 7 \quad (2)$$

در این جا، برای حل معادله (۲)، جدول را تشکیل می دهیم:

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	۳	۱	۱	

با توجه به جدول، می توان نوشت:

$$x = 3 \times 7 = 21$$

با داشتن مقدار x ، می توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$y = \frac{20x - 7}{59} = \frac{20(21) - 7}{59} = \frac{413}{59} = 7$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x = 21 - 59t \quad ; \quad y = 7 - 20t$$

مثال: جوابهای صحیح و مثبت معادله سیال زیر را به دست آورید.

$$7x + 11y + 26z = 130 \quad (1)$$

حل: بزرگترین ضریب مجهولها، ضریب z است؛ بنابراین، باید داشته باشیم:

$$7 + 11 + 26z \leq 130 \quad ; \quad z \leq 4$$

پس، می توان نوشت:

$$z_1 = 1 : \quad 7x_1 + 11y_1 = 104 \quad ; \quad 7x_1 \equiv 104 \quad (2)$$

با تشکیل جدول خواهیم داشت:

$\times n_i$	۱۱۰	۷۰	۴۰	۳۰	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	-۳	-۲	-۱	-۱	

$$x_1 = (-3)(104) = -312$$

با توجه به همنهشتی زیر:

$$-312 \equiv 7$$

مقادیر x_1 و y_1 چنین است:

