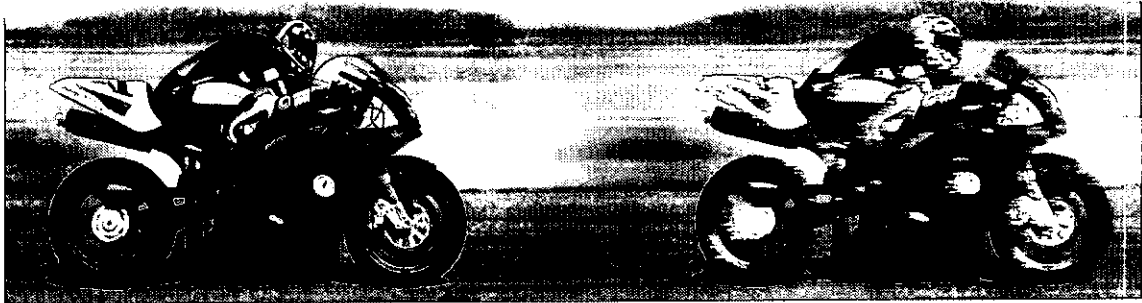




حد تابع



همسایگی

بنا بر تعریف، عضوی از مجموعه اعداد حقیقی مانند x که در نامساوی $0 < |x - a| < r$ یا در نامساوی $a - r < x < a + r$ صدق کند، یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و شعاع r است.

قرارداد: اعداد مثبت کوچک را با ε یا δ و اعداد مثبت بزرگ را با M و N نشان می‌دهیم.

تعریف حد تابع

فرض می‌کنیم، تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد (ممکن است تابع f در خود a تعریف نشده باشد). می‌گوییم: حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ ، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر چه قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

یا می‌نویسیم:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

برای اثبات رابطه بالا که آن را یک «استلزام منطقی» می‌نامیم (گزاره شرطی همیشه درست)، به این صورت

وقتی درباره حد تابع بحث می‌کنیم، هدف ما بررسی رفتار تابع است، یعنی وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی بسیار بسیار نزدیک شود، ولی هیچ‌گاه به آن نرسد. این مقاله بر سه مورد اساسی در مسائل حد تأکید می‌کند:

۱. مسائلی که با استفاده از تعریف حد، حل می‌شوند و بررسی این که چرا باید برگشت پذیری مسأله مورد توجه باشد و چرا در مباحث دیگر این عمل را انجام نمی‌دهیم.
۲. تعیین شعاع همسایگی مناسب در مسائل، به خصوص در مسائل کسری و رادیکالی.

۳. تعیین کران بالا و کران پائین یک عبارت در مسائل نسبتاً پیچیده.

حدود تغییرات $|x|$ در بازه (a, b)

فرض می‌کنیم $a, b \in \mathbb{R}$ و $0 \leq a < b$

- الف) $a < x < b \Rightarrow a < |x| < b$
- ب) $-b < x < -a \Rightarrow a < |x| < b$
- ج) $-a < x < b \Rightarrow 0 \leq |x| < b$
- د) $-b < x < a \Rightarrow 0 \leq |x| < b$

مثال:

$$-4 < x < 7 \Rightarrow 0 \leq |x| < 7$$

$$|x-2| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| \cdot |x-5| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 7x + 10| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 7x + 7| + 3 < \varepsilon$$

چرا باید مسأله برگشت پذیر باشد

در حل مسائل تعریف حد از نابرابری $|f(x) - L| < \varepsilon$ به نابرابری $|x - a| < \delta$ می‌رسیم و δ را پیدا می‌کنیم، مقدار δ به عدد شعاع همسایگی و احیاناً به مقدار کران بالا و پائین عبارت‌ها بستگی دارد. یافتن δ ی مناسب، یک تحقیق یا یک جست و جو است. پس از یافتن این δ ، باید نشان دهیم که برای δ ی به دست آمده می‌توان از نابرابری $|x - a| < \delta$ به نابرابری $|f(x) - L| < \varepsilon$ رسید. برای مثال اگر شخص دیگری این مسأله را با شعاع همسایگی $\frac{1}{4}$ حل کند، δ ی دیگری به دست می‌آید.

و چنانچه شخص سومی شعاع همسایگی را $\frac{1}{5}$ بگیرد، δ سومی به دست می‌آید. به همین علت است که باید برای δ به دست آمده مسأله برگشت پذیر باشد.

نکته: اگر در حل همین مسأله دقت کنیم، می‌بینیم مشکل مسأله پس از یافتن رابطه $|x-2| \cdot |x-5| < \varepsilon$ شروع شده است. وقتی کران بالای $|x-5|$ را در شرایط $1 < x < 3$ و $x \neq 2$ یافتیم، رابطه (۲) را نوشتیم که رابطه کلیدی برگشت پذیری است. یعنی می‌توان به جای عمل برگشت پذیری چنین نوشت:

اگر $\delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $|x-2| < \delta$ با توجه به رابطه (۲)، می‌توان نابرابری $|x^2 - 7x + 7| + 3 < \varepsilon$ را نتیجه گرفت.

مسأله ۲. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2}{5x - 8} = 3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 2}{5x - 8} - 3 \right| < \varepsilon$$

عمل می‌کنیم که از نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ شروع می‌کنیم و به جای $f(x)$ ، مقدار آن را قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن، به نامساوی $|x - a| < \delta$ می‌رسیم.

درواقع در این قسمت باید δ را بر حسب ε به دست آورد. پس از یافتن δ بر حسب ε باید بتوان از نابرابری $|x - a| < \delta$ ، به نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ رسید.

این قسمت از حل را «برگشت پذیری» گویند. مسأله ۱. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x + 7) = -3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \exists 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 7x + 7 + 3| < \varepsilon$$

رابطه (۱)

$$|x^2 - 7x + 10| < \varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| \cdot |x-5| < \varepsilon$$

چون $x \rightarrow 2$ ، فرض می‌کنیم: $0 < |x-2| < 1$ ؛ یعنی شعاع همسایگی را عدد ۱ فرض می‌کنیم:

$0 < |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1, x \neq 2 \Rightarrow 1 < x < 3, x \neq 2$ درحالی‌که $1 < x < 3$ و $x \neq 2$ ، اکنون کران بالای $|x-5|$ را می‌سازیم.

$$1 < x < 3 \Rightarrow -4 < x-5 < -2 \Rightarrow 2 < |x-5| < 4$$

حال به رابطه (۱) برمی‌گردیم. عبارت $|x-2| \times 4$ از عبارت $|x-2| \cdot |x-5|$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|x-2| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| \cdot |x-5| < \varepsilon$$

رابطه (۲)

$$|x-2| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\begin{cases} 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{4} \\ 0 < |x-2| < 1 \end{cases} \quad \delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

حال به بررسی برگشت پذیری مسأله می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم: $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\} = 1$ ، پس خواهیم داشت:

$$0 < |x-2| < 1 < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2| \times 4 < \varepsilon$$

بنابراین رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$\left| \frac{x^2+2}{5x-8} - 3 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2-15x+26}{5x-8} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-2)(x-13)}{5x-8} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-2| \times \frac{|x-13|}{|5x-8|} < \varepsilon \quad \text{رابطه (۱)}$$

حال باید یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۲ و شعاع ε در نظر بگیریم و کران بالای $|x-13|$ و کران پائین $|5x-8|$ را پیدا کنیم. ممکن است کران پائین $|5x-8|$ صفر شود که در این صورت نمی توان حل را ادامه داد. نمی توانیم به طور تصادفی ε مناسب را انتخاب کنیم که در این صورت ممکن است، از ما سؤال شود، از کجا فهمیدید شعاع همسایگی مناسب فلان عدد است. به همین علت، شعاع همسایگی را ε فرض می کنیم و کران پائین مخرج را می سازیم و کران پائین را بزرگ تر از صفر قرار می دهیم تا شعاع همسایگی مناسب به دست آید. پس:

$$0 < |x-2| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x-2 < \varepsilon, x \neq 2 \Rightarrow 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon, x \neq 2$$

حال عبارت $5x-8$ را می سازیم.

$$10-5\varepsilon < 5x < 10+5\varepsilon \Rightarrow 2-5\varepsilon < 5x-8 < 2+5\varepsilon$$

اگر $2-5\varepsilon > 0$ ، آن گاه $\frac{2}{5} < \varepsilon$ ، در این شرایط کران

پائین مخرج، صفر نخواهد شد. پس برای ادامه حل باید

$$\varepsilon < \frac{2}{5} \text{ باشد. با این ملاک به دست آمده، مجازیم } \varepsilon = \frac{1}{5}$$

یا هر عدد کوچک تر از $\frac{2}{5}$ را بنامیم. پس:

$$0 < |x-2| < \frac{1}{5} \Rightarrow 1 < 5x-8 < 3 \Rightarrow 1 < |5x-8| < 3$$

کران پائین مخرج با این شعاع همسایگی، عدد ۱

است. حال کران بالای صورت را می یابیم:

$$0 < |x-2| < \frac{1}{5} \Rightarrow 2-\frac{1}{5} < x < 2+\frac{1}{5} \quad x \neq 2$$

$$\Rightarrow -11-\frac{1}{5} < x-13 < -11+\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{56}{5} < x-13 < -\frac{54}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{54}{5} < |x-13| < \frac{56}{5}$$

پس در این شرایط، کران بالای عبارت صورت $\frac{56}{5}$ است.

$$\text{عبارت } |x-2| \times \frac{56}{|5x-8|} \text{، از عبارت } |x-2| \times \frac{56}{1}$$

بزرگ تر است، پس:

$$|x-2| \times \frac{56}{5} < \varepsilon \Rightarrow |x-2| \times \frac{|x-13|}{5x-8} < \varepsilon \quad \text{رابطه (۲)}$$

این رابطه را که کلید برگشت پذیری است، رابطه برگشت پذیری می نامیم.

$$|x-2| \times \frac{56}{5} < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{5\varepsilon}{56} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < |x-2| < \frac{5\varepsilon}{56} \\ 0 < |x-2| < \frac{1}{5} \end{cases}, \delta \leq \min\left\{\frac{1}{5}, \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$$

اگر $\delta \leq \min\left\{\frac{1}{5}, \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$ باشد، آن گاه از نابرابری

$$0 < |x-2| < \delta \text{ با توجه به رابطه (۲) که رابطه}$$

$$\left| \frac{x^2+2}{5x-8} - 3 \right| < \varepsilon \text{، به نابرابری برگشت پذیری است،}$$

خواهیم رسید.

مسئله ۳. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-3x+3} = 1$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt{x^2-3x+3} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| (\sqrt{x^2-3x+3}-1) \times \frac{\sqrt{x^2-3x+3}+1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} < \varepsilon$$

مثبت است

اگر $y = x^2 - 3x + 1$ فرض شود، از $y'_x = 2x - 3 = 0$ به دست می آید $x = \frac{3}{2}$.

بهرتر است شعاع همسایگی را عددی انتخاب کنیم که $\frac{3}{2}$ در بازه همسایگی قرار گیرد، چون $x = \frac{3}{2}$ طول می نیمم

مطلق تابع، با ضابطه $y = x^2 - 3x + 3$ است.

اگر $r = 1$ انتخاب شود نظر ما تأمین خواهد شد.

$$0 < |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1, x \neq 1 \Rightarrow 0 < x < 2, x \neq 1$$

حال می گوئیم وقتی $0 < x < 2$ و $x \neq 1$ ، می نیمم

مطلق عبارت مخرج به ازای $x = \frac{3}{2}$ حاصل می شود که برابر

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \text{ است.}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس مشکل مخرج به خوبی حل شد. برای تعیین کران

بالای صورت حل را ادامه می دهیم.

$$0 < x < 2, x \neq 1 \Rightarrow -2 < x-2 < 0 \Rightarrow 0 < |x-2| < 2$$

در این شرایط کران بالای صورت عدد ۲ است.

$$\text{عبارت } |x-1| \times \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} \text{ از عبارت}$$

$$|x-1| \times \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} \text{ بزرگ تر است، پس:}$$

$$|x-1| \times \frac{2}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 1} < \varepsilon$$

رابطه برگشت پذیری

$$|x-1| \times \frac{2}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\sqrt{3}+2}{4} \varepsilon$$

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < \frac{\sqrt{3}+2}{4} \varepsilon \\ 0 < |x-1| < 1 \end{cases}; \delta \leq \text{Min} \left\{ \frac{\sqrt{3}+2}{4} \varepsilon, 1 \right\}$$

اگر $\delta \leq \text{Min} \left\{ \frac{\sqrt{3}+2}{4} \varepsilon, 1 \right\}$ باشد، آن گاه از رابطه

$$0 < |x-1| < \delta$$

$$|x^2 - 3x + 2 - 1| < \varepsilon \text{ خواهیم رسید.}$$

مسئله ۴. به کمک تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$$

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x^2 + x + 1)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|x-1| \times |x^2 + x + 1| < \varepsilon$$

$$0 < |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1, x \neq 1, 0 < x < 2, x \neq 1$$

باید کران بالای $|x^2 + x + 1|$ را وقتی $0 < x < 2$

و $x \neq 1$ پیدا کرد.

$$y = x^2 + x^2 + x + 1 \Rightarrow y'_x = 3x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \Delta < 0, a > 0$$

پس تابع y صعودی اکید است. وقتی $0 < x < 2$ ، کران

بالای آن در $x = 2$ به دست می آید:

$$x = 2 \Rightarrow y = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

عبارت $|x-1| \times 15$ ، از عبارت

$$|x-1| \times |x^2 + x^2 + x + 1| \text{ بزرگ تر است، پس:}$$

رابطه برگشت پذیری

$$|x-1| \times 15 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times |x^2 + x^2 + x + 1| < \varepsilon$$

$$|x-1| \times 15 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{15}$$

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{15}; \\ 0 < |x-1| < 1 \end{cases} \quad \delta \leq \text{Min} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{15} \right\}$$

اگر $\delta \leq \text{Min} \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{15} \right\}$ باشد، آن گاه از نابرابری

$$0 < |x-1| < \delta$$