

حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت دوّم)

♦ احمد قندهاری

$$\begin{array}{ll} b & (1) \\ +\infty & (2) \\ -\infty & (3) \\ \infty & (4) \end{array} \quad a \Rightarrow f(x)$$

$$\begin{array}{ll} b & (5) \\ +\infty & (6) \\ -\infty & (7) \\ \infty & (8) \end{array} \quad +\infty \Rightarrow f(x)$$

$$\begin{array}{ll} b & (9) \\ +\infty & (10) \\ -\infty & (11) \\ \infty & (12) \end{array} \quad -\infty \Rightarrow f(x)$$

$$\begin{array}{ll} b & (13) \\ +\infty & (14) \\ -\infty & (15) \\ \infty & (16) \end{array} \quad \infty \Rightarrow f(x)$$

x

۷-۱. بنا به قرارداد؛ اعداد مثبت فوق العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم. اگر x یا y به سمت $+\infty$ میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن زیاد شدن از هر عدد مثبت فوق العاده بزرگ مفروضی بزرگتر است یعنی:

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > M \\ y \rightarrow +\infty \Rightarrow y > N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت $(-\infty)$ میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق العاده کوچک مفروضی، کوچکتر است، یعنی:

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < -M \\ y \rightarrow -\infty \Rightarrow y < -N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت (∞) میل کند، می‌گوییم $|x|$ یا $|y|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow |x| \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| > M$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow |y| \rightarrow +\infty \Rightarrow |y| > N$$

۸-۱. حالات حدّ: فرض می‌کنیم، تابع f به معادله $y = f(x)$ را داشته باشیم. در این صورت ممکن است x به سمت عدد (a) میل کند یا به سمت $(+\infty)$ میل کند یا به سمت $(-\infty)$ میل کند یا به سمت ∞ میل کند.

وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند، آنگاه ممکن است $f(x)$ به سمت عدد (b) میل کند یا به سمت $(+\infty)$ میل کند یا به سمت $(-\infty)$ میل کند یا به سمت (∞) میل کند. اگر کمی دقت کنیم مسائل حدّ می‌تواند (۱۶) حالت باشد، که در نمودار زیر نشان داده شده است.

$$y = f(x)$$

مسائلی که قبلاً حل شد از مسأله (۱) تا مسأله (۶) همگی از حالت اول می‌باشند.

۹-۱. تعریف حدّ تابع، در حالت‌های دوم تا شانزدهم

$$۲: \begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \rightarrow a \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists \sigma > 0 : 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) > N$$

$$۳: \begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \rightarrow a \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists \sigma > 0 : 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) < -N$$

$$۴: \begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \rightarrow a \end{cases}$$

$$۱۴: \begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) > N$$

$$۱۵: \begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow f(x) < -N$$

$$۱۶: \begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

$$\forall N > 0 \exists \sigma > 0 : 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x)| > N$$

$$۵: \begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$۶: \begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) > N$$

$$۷: \begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) < -N$$

$$۸: \begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x)| > N$$

$$۹: \begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$۱۰: \begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow f(x) > N$$

$$۱۱: \begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow f(x) < -N$$

$$۱۲: \begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\forall N > 0 \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x)| > N$$

$$۱۳: \begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

۱-۹. اینک سائلی از حالت دوم تا شانزدهم مطرح می‌کنیم.
برای آن‌که شمارهٔ مسئله با حالت‌های تعریف حد تابع هماهنگ
باشد، شمارهٔ مسئله را شمارهٔ حالت تعریف حد تابع می‌گذاریم.
مسئلهٔ دوم (از حالت دوم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{f}{(x-1)^2} = +\infty \\ x \rightarrow 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \exists \sigma > 0 : 0 < |x - 1| < \sigma \Rightarrow \frac{f}{(x-1)^2} > N$$

$$\frac{f}{(x-1)^2} > N \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{f} < \frac{1}{N} \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{f}{N}$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \sqrt{\frac{f}{N}} \quad \text{با مقایسه با گزاره مقدم استلزام منطقی}$$

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{f}{N}} \quad \text{می‌توان نوشت:}$$

مسئلهٔ سوم (از حالت سوم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{-2}{(x-2)^2} = -\infty \\ x \rightarrow 2 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \exists \sigma > 0 : 0 < |x - 2| < \sigma \Rightarrow \frac{-2}{(x-2)^2} < -N$$

$$\frac{-2}{(x-2)^2} < -N \Rightarrow \frac{2}{(x-2)^2} > N \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2} < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 < \frac{2}{N} \Rightarrow |x-2| < \sqrt{\frac{2}{N}}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم: $\sigma \leq \sqrt{\frac{2}{N}}$

مسئله چهارم (از حالت چهارم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} \frac{5}{(x-1)^2} = \infty \\ x \rightarrow 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists \sigma > 0 : 0 < |x-1| < \sigma \Rightarrow \left| \frac{5}{(x-1)^2} \right| > N$$

$$\left| \frac{5}{(x-1)^2} \right| > N \Rightarrow \left| \frac{(x-1)^2}{5} \right| < \frac{1}{N} \Rightarrow \left| \frac{(x-1)^2}{5} \right| < \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow |(x-1)^2| < \frac{5}{N} \Rightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{5}{N}}$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{5}{N}}$$

مسئله پنجم (از حالت پنجم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = 2 \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0 : x > M \Rightarrow \left| \frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^2-1-2x^2+2}{x^2-1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x^2-1| = x^2-1 \Rightarrow x^2-1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1}$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \quad \text{یا} \quad M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1}$$

توجه: برگشت پذیری این مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$x > M \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + 1}$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \Rightarrow x^2 - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x^2 - 1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x^2-1|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2-1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x^2-1-2x^2+1}{x^2-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^2-1}{x^2-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

مسئله ششم (از حالت ششم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} (x^2 - 6x + 1) = +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists M > 0 : x > M \Rightarrow x^2 - 6x + 1 > N$$

$$x^2 - 6x + 1 > N \Rightarrow x^2 - 6x + 9 > N + 8$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 > N + 8 \Rightarrow |x-3| > \sqrt{N+8}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x-3| = x-3$$

$$\Rightarrow x-3 > \sqrt{N+8} \Rightarrow x > \sqrt{N+8} + 3$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N+8} + 3$$

مسئله هفتم (از حالت هفتم): ثابت کنید (با استفاده از تعریف حد تابع)

$$\begin{cases} \text{حد} -\sqrt{x^2-2x+3} = -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists M > 0 : x > M \Rightarrow -\sqrt{x^2-2x+3} < -N$$

$$-\sqrt{x^2-2x+3} < -N \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+3} > N$$

$$\Rightarrow x^2-2x+3 > N^2 \Rightarrow x^2-2x+1 > N^2+2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 > N^2+2 \Rightarrow |x-1| > \sqrt{N^2+2}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\Rightarrow x-1 > \sqrt{N^2+2} \Rightarrow x > \sqrt{N^2+2} + 1$$

با مقایسه با گزاره مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow -x > \sqrt{\frac{y}{\varepsilon} - 1} \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{y}{\varepsilon} - 1}$$

با مقایسه با گزاره مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2 + y + 1}$$

مسئله هشتم (از حالت هشتم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (-1)^x (x^2 - 4x + 1) = \infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |(-1)^x (x^2 - 4x + 1)| > N$$

توجه:

$$\begin{cases} (-1)^x = +1 \text{ یا } -1 \text{ و } |\pm 1| = 1 \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow |(-1)^x (x^2 - 4x + 1)| > N \Rightarrow |x^2 - 4x + 1| > N$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x^2 - 4x + 1| = x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 > N \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > N + 3$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 > N + 3 \Rightarrow |x - 2| > \sqrt{N + 3}$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

$$\Rightarrow x - 2 > \sqrt{N + 3} \Rightarrow x > \sqrt{N + 3} + 2$$

با مقایسه با گزاره مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم.

$$M \geq \sqrt{N + 3} + 2$$

مسئله نهم (از حالت نهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} = 2 \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow \left| \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^2 + 4 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{x^2 + 1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$M \geq \sqrt{\frac{y}{\varepsilon} - 1}$$

مسئله دهم (از حالت دهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \sqrt{x^2 - 3x} = +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x} > N$$

$$\sqrt{x^2 - 3x} > N \Rightarrow x^2 - 3x > N^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} > N^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > N^2 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| > \sqrt{N^2 + \frac{9}{4}}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| = -x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -x + \frac{3}{2} > \sqrt{N^2 + \frac{9}{4}} \Rightarrow -x > \left(\sqrt{N^2 + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x < -\left(\sqrt{N^2 + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right)$$

با مقایسه با گزاره مقدم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2 + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}$$

مسئله یازدهم (از حالت یازدهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت

کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } -\sqrt{x^2 + 6x} = -\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0. \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 6x} < -N$$

$$-\sqrt{x^2 + 6x} < -N \Rightarrow \sqrt{x^2 + 6x} > N \Rightarrow x^2 + 6x > N^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 > N^2 + 9 \Rightarrow (x + 3)^2 > N^2 + 9$$

$$\Rightarrow |x + 3| > \sqrt{N^2 + 9} \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x + 3| = -x - 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{v}}{|x-1|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x-1|}{\sqrt{v}} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x-1| > \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon}$$

تذکره مهم: در سال سوم داشتیم:

$$|a| - |b| \leq |a \pm b|$$

$$|x| - |1| \leq |x - 1| \quad \text{پس می توان نوشت:}$$

$$\text{اگر } |x| - |1| > \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon} \Rightarrow |x - 1| > \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon}$$

اگر عبارت کوچکتر از $\frac{\sqrt{v}}{\varepsilon}$ بزرگتر باشد مسلماً عبارت بزرگتر هم از $(\frac{\sqrt{v}}{\varepsilon})$ بزرگتر خواهد بود.

$$\Rightarrow |x| > \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon} + |1| \Rightarrow |x| > \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon} + 1$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می گیریم:

$$M \geq \frac{\sqrt{v}}{\varepsilon} + 1$$

مسئله چهاردهم (از حالت چهاردهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (x^2 + 4x - 1) = +\infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow x^2 + 4x - 1 > N$$

$$x^2 + 4x - 1 > N \Rightarrow x^2 + 4x + 4 > N + 5$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 > N+5 \Rightarrow |x+2| > \sqrt{N+5}$$

$$|a| - |b| \leq |a \pm b|$$

داریم:

$$\text{اگر } |x| - |2| > \sqrt{N+5} \Rightarrow |x+2| > \sqrt{N+5}$$

$$\Rightarrow |x| > \sqrt{N+5} + |2| \Rightarrow |x| > \sqrt{N+5} + 2$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می شود:

$$M \geq \sqrt{N+5} + 2$$

مسئله پانزدهم (از حالت پانزدهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } -(x^2 + 6x) = -\infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x-3 > \sqrt{N^2+9} \Rightarrow -x > \sqrt{N^2+9} + 3$$

$$\Rightarrow x < -(\sqrt{N^2+9} + 3)$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+9} + 3$$

مسئله دوازدهم (از حالت دوازدهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (-1)^{[x]}(x^2 - 2x) = \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |(-1)^{[x]}(x^2 - 2x)| > N$$

$$|(-1)^{[x]}(x^2 - 2x)| > N, \quad \left(-1\right)_{x \rightarrow +\infty}^{[x]} = +1$$

$$\text{یا } -1, | \pm 1 | = 1$$

$$\Rightarrow |x^2 - 2x| > N, \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x^2 - 2x| = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x > N \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > N + 1 \Rightarrow (x-1)^2 > N+1$$

$$\Rightarrow |x-1| > \sqrt{N+1}, \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x-1| = -x+1$$

$$\Rightarrow -x+1 > \sqrt{N+1} \Rightarrow -x > \sqrt{N+1} - 1$$

$$\Rightarrow x < -(\sqrt{N+1} - 1)$$

با مقایسه با رابطه گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می گیریم:

$$M \geq \sqrt{N+1} - 1$$

مسئله سیزدهم (از حالت سیزدهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{2x+5}{x-1} = 2 \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow \left| \frac{2x+5}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2x+5}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x+5-2x+2}{x-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{7}{x-1} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x > \sqrt[n]{N}$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt[n]{N}$$

برگشت پذیری:

$$x > M \geq \sqrt[n]{N} \Rightarrow x > \sqrt[n]{N} \Rightarrow x^{\wedge} > N \Rightarrow x^{\wedge} + x^{\vee} + x + 1 > N$$

۱-۱. اگر $x \rightarrow 2^+$ می‌گوییم x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد ۲، آن قدر نزدیک می‌شود به طوری که $(x - 2)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است (ضمناً می‌دانیم $x \neq 2$) یعنی: $0 < x - 2 < \sigma$

در حالت کلی اگر $x \rightarrow a^+$ می‌گوییم، x از طرف اعداد بزرگتر از (a) به عدد (a) آن قدر نزدیک می‌شود به طوری که $(x - a)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است، یعنی: $(x \neq a)$.

$$x \rightarrow a^+ \Rightarrow 0 < x - a < \sigma$$

$$\text{مثال: } x \rightarrow 5^+ \Rightarrow 0 < x - 5 < \sigma$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow 0 < x + 1 < \sigma$$

اگر $x \rightarrow 2^-$ می‌گوییم x از طرف اعداد کوچکتر از (۲) به عدد (۲) آن قدر نزدیک می‌شود به طوری که $(2 - x)$ ، از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است یعنی: $(x \neq 2)$.

در حالت کلی اگر $x \rightarrow a^-$ می‌گوییم، x از طرف اعداد کوچکتر از a به عدد a آن قدر نزدیک می‌شود به طوری که $(a - x)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است، یعنی: $(x \neq a)$.

$$x \rightarrow a^- \Rightarrow 0 < a - x < \sigma$$

$$\text{مثال: } x \rightarrow 2^- \Rightarrow 0 < 2 - x < \sigma$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow 0 < 1 - x < \sigma$$

توجه: فاصله همسایگی مثلاً وقتی $x \rightarrow 2^+$ یک طرفه است، یعنی:

$$\text{اگر } \begin{cases} x \rightarrow 2^+ \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$$

در حالت کلی داریم:

$$\text{اگر } \begin{cases} x \rightarrow a^+ \\ r = \text{شماره همسایگی} \end{cases} \Rightarrow a < x < a + r$$

همچنین فاصله همسایگی وقتی $x \rightarrow 2^-$ یک طرفه است

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow -(x^2 + 6x) < -N$$

$$-(x^2 + 6x) < -N \Rightarrow x^2 + 6x > N \Rightarrow x^2 + 6x + 9 > N + 9$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 > N + 9 \Rightarrow |x + 3| > \sqrt{N + 9}$$

داریم:

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

$$\text{اگر } |x| - |3| > \sqrt{N + 9} \Rightarrow |x + 3| > \sqrt{N + 9}$$

$$\Rightarrow |x| > \sqrt{N + 9} + |3| \Rightarrow |x| > \sqrt{N + 9} + 3$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع نتیجه می‌شود:

$$M \geq \sqrt{N + 9} + 3$$

مسأله شانزدهم (از حالت شانزدهم): با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (x^2 + 4) = \infty \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |x^2 + 4| > N$$

داریم:

$$|a| - |b| \geq |a \pm b|$$

$$\text{اگر } |x^2| - |4| > N \Rightarrow |x^2 + 4| > N$$

$$\Rightarrow |x^2| > N + |4| \Rightarrow |x^2| > N + 4 \Rightarrow |x| > \sqrt{N + 4}$$

با مقایسه با گزاره مقدم تعریف حد تابع می‌توان نوشت:

$$M \geq \sqrt{N + 4}$$

یک مسأله دیگر از حالت ششم: با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (x^{\wedge} + x^{\vee} + x + 1) = +\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : x > M \Rightarrow x^{\wedge} + x^{\vee} + x + 1 > N$$

$$\text{اگر } x \rightarrow +\infty \Rightarrow x^{\wedge} + x^{\vee} + x + 1 > x^{\wedge}$$

$$\text{اگر } x^{\wedge} > N \Rightarrow x^{\wedge} + x^{\vee} + x + 1 > N$$

$$\Rightarrow x^{\wedge} > N \Rightarrow |x| > \sqrt[n]{N}, \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\text{اگر } |x-1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times |x+2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\Rightarrow 0 < x-1 < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}, 1 \right\} \text{ یا}$$

مسأله: با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد} \frac{x^2-1}{|x-1|} = -3 \\ x \rightarrow 1^- \end{array} \right.$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به طوری که:

$$\text{اگر } 0 < 1-x < \sigma \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} + 3 \right| < \varepsilon$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

$$\Rightarrow |-x^2-x-1+3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times |x+2| < \varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1^- \\ r = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ 2 & & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}$$

$$\frac{2 < x+2 < 3}{2 < x+2 < 3} \Rightarrow 2 < |x+2| < 3$$

کران بالای $|x+2|$ عدد (۳) است و عبارت $|x-1| \times 3$ از

عبارت $|x-1| \times |x+2|$ بزرگتر است.

$$\text{اگر } |x-1| \times 3 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times |x+2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1| \times 3 < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow x \rightarrow 1^- \Rightarrow |x-1|$$

$$= 1-x \Rightarrow 0 < 1-x < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\sigma = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\} \text{ یا}$$

$$\text{اگر } \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 2^- \\ r = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 1 < x < 2$$

در حالت کلی

$$\text{اگر } \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow a^- \\ r = \text{شعاع همسایگی} \end{array} \right. \Rightarrow a-r < x < a$$

۱-۱۱. تعریف حد تابع به معادله $y = f(x)$ وقتی $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد} f(x) = b \\ x \rightarrow a^+ \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 : 0 < x-a < \sigma \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد} f(x) = b \\ x \rightarrow a^- \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 : 0 < a-x < \sigma \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

مسأله: با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد} \frac{x^2-1}{|x-1|} = 3 \\ x \rightarrow 1^+ \end{array} \right.$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به طوری که

$$0 < x-1 < \sigma \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{|x-1|} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\left| \frac{x^2-1}{|x-1|} - 3 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{+(x-1)} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2+x+1-3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| \times |x+2| < \varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1^+ \\ r = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ 2 & & 2 \\ 2 & & 2 \end{array}$$

$$\frac{3 < x+2 < 4}{3 < x+2 < 4} \Rightarrow 3 < |x+2| < 4$$

کران بالای $|x+2|$ عدد (۴) است و عبارت $|x-1| \times 4$ از

عبارت $|x-1| \times |x+2|$ بزرگتر است.

