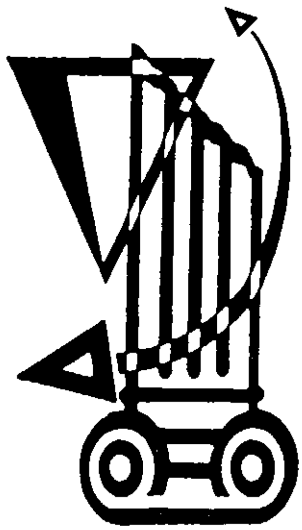
حدّ

(قسمت اول)



احمد قندهاری

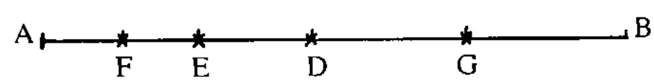
(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)

حدّ، یکی از مفاهیم بنیادی ریاضی است. به همین علّت باید بهای بیشتری به آن داد تا زیربنای درستی از مفاهیم ریاضی حاصل شود.

وقتی از حدّ صحبت می‌کنیم، منظورمان بررسی رفتار یک تابع است وقتی متغیر آن به عدد مشخّصی بسیار نزدیک شود ولی هیچوقت به آن نرسد.

در این فصل مفهوم حدّ را ابتدا به‌صورت شهودی بررسی و بیان می‌کنیم، سپس حدّ تابع تعریف می‌شود. آنگاه با روش شهودی همراه با استدلال، مثالهایی مطرح می‌شود.

مثال (۱): پاره خط AB به طول $l_0 = 1$ را درنظر می‌گیریم.



اگر نقطه C وسط پاره‌خط AB باشد، طول پاره‌خط AC: $l_1 = \frac{1}{2}$

چنانچه نقطه D وسط پاره‌خط AC باشد،طول پاره خط AD: $l_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

اگر نقطه E وسط پاره‌خط AD باشد، طول پاره‌خط AE: $l_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

چنانچه نقطه F وسط پاره‌خط AE باشد،طول پاره خط AF: $l_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$.

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، پاره‌خطهایی به طولهای $l_5 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$ و $l_6 = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}$ و ... $l_n = \frac{1}{2^n}$ خواهیم داشت.

اگر این عمل چندین دفعه تکرار شود (n دفعه)، ملاحظه خواهیم کرد که هرچه‌قدر مقدار n بزرگتر شود طول l_n به عدد صفر نزدیک می‌شود. یا به‌عبارت دیگر:

اگر تعداد دفعات را زیادتر کنیم طول l_n به صفر نزدیکتر می‌شود چنانچه بخواهیم طول l_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه مورد نیاز بزرگ کنیم. ممکن است بپرسید چگونه n مورد نیاز را اختیار می‌کنیم؟

برای پاسخ این سؤال به پرسش زیر دقّت بفرمایید.

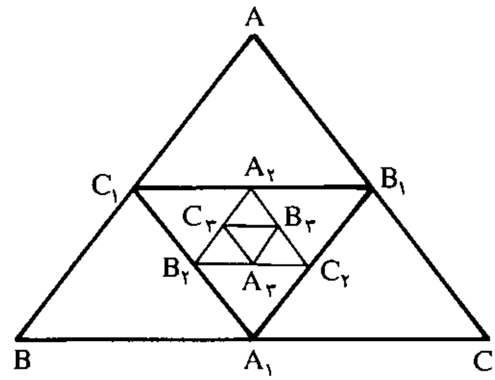
آیا می توان l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که l_n از $\frac{1}{1000}$ کوچکتر شود.

جواب مثبت است چرا که: $l_n = \frac{1}{2^n}$ و می‌دانیم $2^{10} = 1024$ و می‌نویسیم

$$l_n < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n \geq 10$$

بنابراین اگر بخواهیم l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم که مقدار آن از $\frac{1}{1000}$ کمتر شود باید n را مساوی ۱۰ یا بزرگتر از ۱۰ اختیار کنیم.

مثال (۲): مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع $a_0 = 1$ در نظر می‌گیریم.



اگر وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۱B_۱C_۱$ به دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_۱=\frac{۱}{۲}$

چنانچه وسط اضلاع مثلث $A_۱B_۱C_۱$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۲B_۲C_۲$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_۲=\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲^۲}$

اگر وسط اضلاع مثلث $A_۲B_۲C_۲$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۳B_۳C_۳$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_۳=\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^۳}$

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع متعددی پدید می‌آید مانند $A_۴B_۴C_۴$ و $A_۵B_۵C_۵$ و ... $A_nB_nC_n$ که طول اضلاع آنها به ترتیب $a_۴=\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۲^۴}$ و $a_۵=\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱}{۲^۵}$ و ... $a_n=\frac{۱}{۲^n}$ است.
در این مثال می‌خواهیم اندازه محیط و اندازه مساحت مثلث $A_nB_nC_n$ را بررسی کنیم و ببینیم به چه عددی نزدیک می‌شود.

اگر محیط مثلثها را با $۲P_۰$ ، $۲P_۱$ ، $۲P_۲$، ... $۲P_n$ و مساحت مثلثها را با $S_۰$ ، $S_۱$ ، $S_۲$، ... S_n نشان دهیم. و با این اطلاع که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})$ است می‌توان نوشت:

الف: در مورد محیط مثلثها:

اگر $a_۰=۱ \Rightarrow ۲p_۰=۳a_۰=۳(۱)=۳$

اگر $a_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲p_۱=۳a_۱=۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$

اگر $a_۲=\frac{۱}{۲^۲} \Rightarrow ۲p_۲=۳a_۲=۳(\frac{۱}{۲^۲})=\frac{۳}{۲^۲}$

اگر $a_۳=\frac{۱}{۲^۳} \Rightarrow ۲p_۳=۳a_۳=۳(\frac{۱}{۲^۳})=\frac{۳}{۲^۳}$

....

....

اگر $a_n=\frac{۱}{۲^n} \Rightarrow ۲p_n=۳a_n=۳(\frac{۱}{۲^n})=\frac{۳}{۲^n}$

اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم ملاحظه می‌کنیم که $\frac{۳}{۲^n}$ یا $۲p_n$ به صفر نزدیک می‌شود.

چنانچه بخواهیم $(۲p_n)$ به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. یعنی برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $۲p_n$ به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

اینک این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان یک n به اندازه کافی بزرگ اختیار کرد. برای پاسخ به این پرسش به سؤال زیر توجه کنید.

سؤال: آیا می‌توان $(۲p_n)$ را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که $۲p_n$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ شود.

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$۲p_n<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۳}{۲^n}<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۲^n}{۳}>۱۰۰۰ \Rightarrow ۲^n>۳۰۰۰$$

می‌دانیم $۴۰۹۶=۲^{۱۲}$ ، پس اگر n را مساوی ۱۲ یا بزرگتر از ۱۲ اختیار کنیم $۳۰۰۰<۲^{۱۲}$ یا $۳۰۰۰<۲^n$ یا $۲P_n<\frac{۱}{۱۰۰۰}$.

ب: در مورد مساحتها: داشتیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ، $(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})$ است.

اگر $a_۰=۱ \Rightarrow S_۰=\frac{(۱)^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

اگر $a_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S_۱=\frac{(\frac{۱}{۲})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۱}{۴}$

اگر $a_۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_۲=\frac{(\frac{۱}{۴})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^۲})$

اگر $a_۳=\frac{۱}{۸} \Rightarrow S_۳=\frac{(\frac{۱}{۸})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^۳})$

....

....

اگر $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_n = \frac{(\frac{1}{2^n})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^n})$

اگر بخواهیم، S_n به صفرنزدیک شود، باید n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. پس برای nهای به اندازه کافی بزرگ، S_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

سؤال: آیا می‌توان (n) را طوری انتخاب کرد که S_n از $\frac{1}{10000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$S_n < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{4^n}) < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} < \frac{1}{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3}} > 10000 \Rightarrow 4^{n+1} > 10000\sqrt{3}$$

اگر $\sqrt{3}$ را ۱/۷۳ فرض کنیم باید $4^{n+1} > 17300$

می‌دانیم $4^8 = 65536$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم آنگاه S_n کوچکتر از $\frac{1}{10000}$ خواهد شد.

مثال (۳): فرض کنیم دایره C_0 به شعاع $R_0 = 1$ مفروض باشد اگر دایره C_1 در نقطه A مماس بر دایره C_0 به شعاع $R_1 = \frac{1}{2}$ و دایره C_2 در نقطه A مماس بر C_0 به شعاع $R_2 = \frac{1}{4}$ و دایره C_3 در نقطه A مماس بر دایره C_0 به شعاع $R_3 = \frac{1}{8}$ باشد. و به همین روش دایره‌های دیگری مماس بر دایره C_0 در نقطه A و به شعاع نصف شعاع دایره قبلی رسم کنیم و شعاع دایره (n) امی را $R_n = \frac{1}{2^n}$ بنامیم، چنانچه محیط دایره‌ها را با $P_{c_0}, P_{c_1}, P_{c_2}, \ldots, P_{c_n}$ و مساحتهای دایره‌ها را با $S_{c_0}, S_{c_1}, S_{c_2}, \ldots, S_{c_n}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

الف: در مورد محیط‌ها:

اگر $R_0 = 1 \Rightarrow P_{c_0} = 2\pi R_0 = 2\pi$

اگر $R_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{c_1} = 2\pi R_1 = 2\pi(\frac{1}{2})$

اگر $R_2 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow P_{c_2} = 2\pi R_2 = 2\pi(\frac{1}{2^2})$

اگر $R_3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow P_{c_3} = 2\pi R_3 = 2\pi(\frac{1}{2^3})$

....

....

اگر $R_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow P_{c_n} = 2\pi R_n = 2\pi(\frac{1}{2^n})$

حال اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم P_{c_n} یعنی محیط دایره (n) امی خیلی به صفر نزدیک می‌شود.

می‌توان $P_{c_n} = 2\pi(\frac{1}{2^n})$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به‌شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد که P_{c_n} از $\frac{1}{5000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

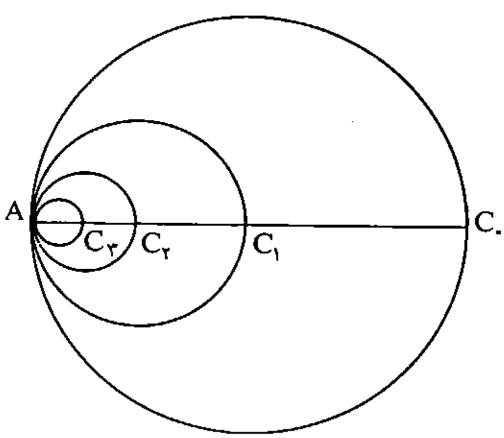
$$P_{c_n} < \frac{1}{5000} \Rightarrow 2\pi(\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{5000} \Rightarrow \frac{2^n}{2\pi} > 5000$$

$$\Rightarrow 2^n > 10000\pi \qquad \pi = 3.14$$

داریم:

$$\Rightarrow 2^n > 31400 \qquad 2^{15} = 32768$$

پس اگر n را مساوی ۱۵ یا بزرگتر از ۱۵ اختیار کنیم، آنگاه P_{c_n} از $\frac{1}{5000}$ کوچکتر خواهد شد.



ب: در مورد مساحتها:

اگر $R_0 = 1 \Rightarrow S_{c_0} = \pi R_0^2 = \pi$

اگر $R_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{c_1} = \pi R_1^2 = \pi(\frac{1}{2})^2 = \pi(\frac{1}{4})$

اگر $R_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{c_2} = \pi R_2^2 = \pi(\frac{1}{4})^2 = \pi(\frac{1}{4^2})$

اگر $R_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{c_3} = \pi R_3^2 = \pi(\frac{1}{8})^2 = \pi(\frac{1}{4^3})$

....

....

اگر $R_n = \frac{۱}{۲^n} \Rightarrow S_{c_n} = \pi R_n^۲ = \pi(\frac{۱}{۲^n})^۲ = \pi(\frac{۱}{۴^n})$

حال اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم، S_{c_n} به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود، به عبارت دیگر: می‌توان S_{c_n} را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد تا S_{c_n} از $\frac{۱}{۲۰۰۰}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است، می‌نویسیم:

$$S_{cn} < \frac{۱}{۲۰۰۰} \Rightarrow \pi(\frac{۱}{۴^n}) < \frac{۱}{۲۰۰۰} \Rightarrow \frac{۴^n}{\pi} > ۲۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۴^n > ۲۰۰۰\pi \quad \pi = ۳/۱۴ \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow ۴^n > ۶۲۸۰ \quad ۴^۷ = ۱۶۳۸۴ \quad \text{داریم:}$$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم، آنگاه (۴^n) از (۶۲۸۰) بزرگتر می‌شود در نتیجه S_{cn} از $\frac{۱}{۲۰۰۰}$ کوچکتر خواهد شد.

◀ حدّ راست:

مثال(۴): تابع به معادله $f(x) = ۳x - ۱$ را با شرط $x > ۲$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود بررسی کنیم.

به عبارت دیگر، x را از طرف اعداد بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که مقدار f(x) به چه عددی نزدیک و نزدیکتر می‌شود به این منظور جدول زیر را تنظیم کرده‌ایم:

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۵/۳	۵/۰۳	۵/۰۰۳	۵/۰۰۰۳

این جدول نشان می دهد، وقتی x (از طرف اعداد بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۵) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. چنانچه نتایج این جدول را از دیدی دیگر بررسی کنیم می‌توانیم بگوییم:

مقدار f(x) به عدد ۵ نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از طرف اعداد بزرگتر از ۲) به عدد۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) را به عدد ۵ آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x) - ۵|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد، در این صورت x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

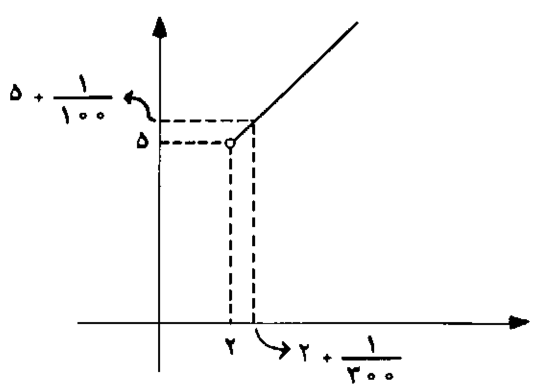
$$|f(x) - ۵| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x - ۱ - ۵| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۳x - ۶| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳(x - ۲)| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۳|x - ۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |x - ۲| < \frac{۱}{۳۰۰}$$

چون $x > ۲ \Rightarrow |x - ۲| = x - ۲ \Rightarrow x - ۲ < \frac{۱}{۳۰۰}$

پس x را باید به اندازه‌ای به ۲ نزدیک کنیم که $(x - ۲)$ از $\frac{۱}{۳۰۰}$ کوچکتر شود.

بنابراین اگر $(x - ۲)$ کوچکتر از $\frac{۱}{۳۰۰}$ باشد، آنگاه $|f(x) - ۵|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x با مقادیر بزرگتر از (۲) به عدد (۲) میل می‌کند برابر عدد (۵) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = ۵ \\ x \to ۲^+ \end{cases}$$

مثال(۵): تابع f به معادله

$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

مقادیر f(x) را به ازای $x > ۱$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود، وقتی x (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال نتایج این جدول را از دیدگاه دیگری بررسی می‌کنیم. ابتدا مقادیر f(x) را در نظر می‌گیریم.

مقدار f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر کنیم. یعنی f(x) را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم، به شرطی که x را (از مقادیر بزرگتر از ۱) به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، f(x) را به عدد ۲ آنقدر نزدیک کنیم که $|f(x)-۲|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ شود. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow|x+۱-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

چون $x>۱\Rightarrow|x-۱|=x-۱\Rightarrow x-۱>\frac{۱}{۱۰۰۰}$

پس معلوم شده است اگر x را از طرف اعداد بزرگتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا (x − ۱) کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ باشد. آنگاه $|f(x)-۲|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ خواهد شد.

توجه: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با ε یا δ نشان می‌دهیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم.

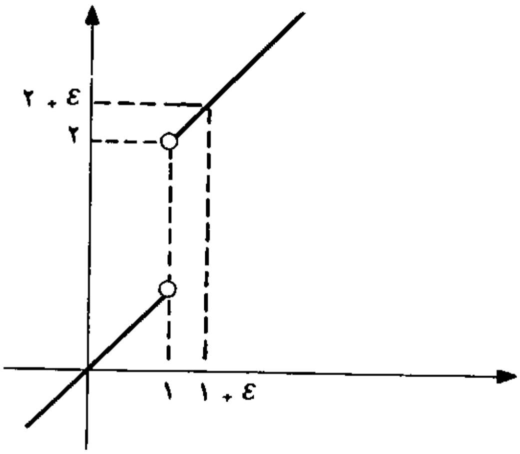
سؤال: می‌خواهیم f(x) را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x)-۲|$ از (ε) کوچکتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۲|<\varepsilon\Rightarrow|x+۱-۲|<\varepsilon\Rightarrow|x-۱|<\varepsilon$$

چون $x>۱\Rightarrow|x-۱|=x-۱\Rightarrow x-۱<\varepsilon$

بنابراین معلوم شده است که اگر x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا (x − ۱) کوچکتر از (ε) باشد، آنگاه $|f(x)-۲|$ از (ε) کوچکتر خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x از مقادیر بزرگتر از (۱) به عدد (۱) میل می‌کند برابر ۲ است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=۲\\ x\to ۱^{+}\end{cases}$$

◄ نتیجه شهودی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه f(x) در بازه $(x_۰,b)$ تعریف شده باشد. عدد (L) را حدّ راست تابع f در نقطه $x_۰$ نامیم اگر بتوان f(x) را به هر اندازه دلخواه به L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت $(x-x_۰)$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=L\\ x\to x_۰^{+}\end{cases}$$

مثال (۶): تابع f به معادله $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر f(x) را به ازای $x>۲$ و در نزدیکی عدد (۲) محاسبه می‌کنیم و نتایج را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۰/۳۱	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر

می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال این جدول را از دیدی دیگر بررسی می‌کنیم، ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم.

مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر کنیم.

به عبارت دیگر، مقدار $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه کافی (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک کنیم.

سؤال : می‌خواهیم مقدار $f(x)$ را آنقدر به عدد صفر نزدیک کنیم که $f(x)$ از $\frac{1}{100}$ کمتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می نویسیم:

$$f(x)<\frac{1}{100}\Rightarrow\sqrt{x-2}<\frac{1}{100}\Rightarrow x-2<\frac{1}{10000}$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-2)$ کوچکتر از $\frac{1}{10000}$ باشد.

حال همین سؤال را کلی تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، $f(x)$ را به عدد صفر آنقدر نزدیک کنیم تا $f(x)$ از (ε) کوچکتر باشد، در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کرد؟

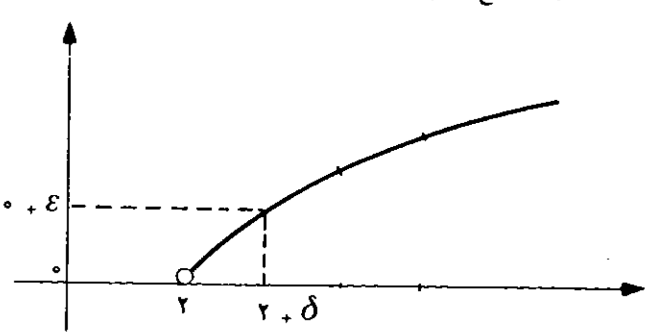
جواب: می‌نویسیم:

$$f(x)<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{x-2}<\varepsilon\Rightarrow x-2<\varepsilon^2$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آن قدر نزدیک کنیم تا $(x-2)$ کوچکتر از (ε^2) باشد. اگر $\delta=\varepsilon^2$ یا $\delta\le\varepsilon^2$، می‌توان نوشت:

$$0<x-2<\delta\le\varepsilon^2\Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

نمودار تابع f چنین است.



▶ تعریف ریاضی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه $f(x)$ در بازه (x_0,b) تعریف شده باشد عدد L را حدّ راست تابع f در نقطه x_0 گوییم و می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=L\\ x\to x_0^+\end{cases}$$

اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$0<x-x_0<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

مثال (۷): تابع f به معادله $f(x)=-5x+1$ مفروض است. با استفاده از تعریف ریاضی حدّ راست تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=-4\\ x\to 1^+\end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود دارد به طوری که:

$$0<x-1<\delta\Rightarrow|f(x)+4|<\varepsilon$$

$$|f(x)+4|<\varepsilon\Rightarrow|-5x+1+4|<\varepsilon\Rightarrow|-5x+1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|-5(x-1)|<\varepsilon\Rightarrow 5|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$$

چون $x\to1^+\Rightarrow|x-1|=x-1$

$$\Rightarrow0<x-1<\frac{\varepsilon}{5}\Rightarrow\delta\le\frac{\varepsilon}{5}$$

فایده حل ریاضی مسأله آن است که جواب مسأله کلیّت دارد.

مثلاً اگر $\varepsilon=\frac{1}{100}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{500}$

و اگر $\varepsilon=\frac{1}{200}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{1000}$

و اگر $\varepsilon=\frac{1}{300}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{1500}$

پس برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ به وجود می‌آید.

تمرین: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) و هم با تعریف ریاضی حدّ راست تابع، بررسی و حل کنید.

$$\begin{cases}\text{حد } (f(x)=2x-3)=1\\ x\to 2^+\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\sqrt{x-۱})=۰ \\ x \to ۱^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{|x-۱|})=۲ \\ x \to ۱^+ \end{cases}$$

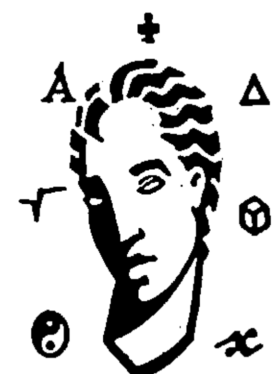
تمرین: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ راست توابع به معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x+[x]) \\ x \to ۱^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=[x]+[-x]) \\ x \to ۴^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x-[x]) \\ x \to ۳^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}) \\ x \to ۱^+ \end{cases}$$



تفریح اندیشه ۳

در پایان اجرای یک برنامهٔ موسیقی مسئول رختکن در مکان حضور نداشت. بجای او یک راهنما البسهٔ حاضران را به آنان تحویل می‌داد. چنانچه چهار نفر در آن جمع از کت استفاده کرده باشند، به چند طریق ممکن است راهنما کتهای آنان را اشتباه تحویل دهد، به‌طوری که هیچ‌کس کت خودش را دریافت نکند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

سخنانی است که ما را در مورد مطلوبی که در جستجوی شناختن آن هستیم به علم یقینی می‌رساند، خواه انسان برهان را میان خود و نفس خود برای استنباط آن مطلوب به‌کار گیرد، یا در مورد شخص دیگر از آن استفاده کند. یا آنکه دیگری به‌وسیلهٔ آن، در اثبات مطلوبی، انسان را مخاطب قرار دهد. برهان در همهٔ این حالها به نتیجهٔ علم یقینی می‌رسد.

احصاء العلوم فارابی