

حد و نقطه

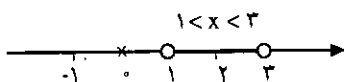
همسایگی

نامساوی $|x - 2| < 1$ را در نظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم؛ به صورت زیر:

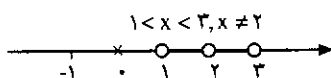
$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

عدد میانی بازه‌ی $(1, 3)$ ، عدد ۲ است. فرض می‌کنیم $x = 2$. اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی $(1, 3)$ را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = 2$ به شعاع ۱ گوئیم. چنان‌چه از بازه‌ی $(1, 3)$ ، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $\{2\} - (1, 3)$ ، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف شده) عدد ۲ به شعاع ۱ گوئیم.

همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱



۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می‌خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲، به ۲ نزدیک کنیم، ولی به آن نرسد؛ به صورت زیر:

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, \dots$$

ملاحظه می‌کنید که هر قدر تعداد ۹های سمت راست ممیز را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \rightarrow 2^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به عدد آن نزدیک می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$$x = 3, \dots, 2/7, \dots, 2/3, \dots, 2/1, 2/0.1, 2/0.01, 2/0.001, 2/0.0001, \dots$$

باز هم ملاحظه می‌کنیم، هر قدر تعداد ۰های بین ممیز و عدد ۱ را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \rightarrow 2^+$$

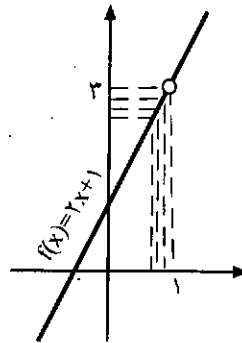
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a| < r$ یا $a-r < x < a+r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r گوئیم.

حد چپ تابع

بررسی حد چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)$	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به آن نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} 0 < 1-x < 0/1 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0/2 \\ 0 < 1-x < 0/01 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0/02 \\ 0 < 1-x < 0/001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0/002 \\ 0 < 1-x < 0/0001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0/0002 \\ 0 < 1-x < 0/00001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0/00002 \end{aligned}$$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/2$ باشد، باید:

$$0 < 1-x < 0/1$$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/02$ باشد، باید:

$$0 < 1-x < 0/01$$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/002$ باشد، باید:

$$0 < 1-x < 0/001$$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/0002$ باشد، باید:

$$0 < 1-x < 0/0001$$

اگر بخواهیم $|f(x)-3| < 0/00002$ باشد، باید:

$$0 < 1-x < 0/00001$$

می‌توان گفت: $f(x)$ را به حد خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و $x \rightarrow 1^-$ می‌خواهیم: $|f(x)-3| < \frac{1}{250}$ باشد. تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم. حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |f(x)-3| < \frac{1}{250} &\Rightarrow |(2x+1)-3| < \frac{1}{250} \Rightarrow |2x-2| < \frac{1}{250} \\ \Rightarrow 2|x-1| < \frac{1}{250} &\Rightarrow |x-1| < \frac{1}{500} \Rightarrow 0 < 1-x < \frac{1}{500} \end{aligned}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن قدر نزدیک شود که فاصله‌اش تا عدد ۱ کمتر از $\frac{1}{500}$ باشد.

پس اگر بخواهیم $f(x)$ به ۳ آن قدر نزدیک شود که فاصله‌ی $f(x)$ از عدد ۳ کمتر از $\frac{1}{250}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱ آن قدر نزدیک کنیم که فاصله‌ی x تا عدد ۱ کمتر از $\frac{1}{500}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-3| < \frac{1}{77}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم. جواب: $0 < 1-x < \frac{1}{144}$.

تعریف حد چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a, x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^-$ ، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x < x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

تمرین: می‌دانیم: $\lim_{x \rightarrow 3^-} (4x+3) = 11$ ، می‌خواهیم

$|f(x)-11| < \frac{1}{400}$ باشد. تعیین کنید x را چه قدر باید از سمت چپ ۳ به عدد ۲ نزدیک کنیم.

$$\text{جواب: } 0 < 2-x < \frac{1}{1600}$$

حد راست تابع

دوباره تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود؛ یعنی $x \rightarrow 1^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
$f(x)$	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

پس x را از طرف اعداد بزرگ تر از 1 به عدد 1 آن قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1500}$ باشد.

تعریف حد راست تابع

فرض می کنیم تابع f در بازه (x_0, b) تعریف شده باشد. می گوئیم حد راست تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^+$ ، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه ϵ دل خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ تر از x_0 به اندازه δ کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

مثال: داریم: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x + 3) = -1$. می خواهیم:

$$\frac{1}{300} < |(-4x + 3) + 1| < \frac{1}{300} \Rightarrow x \text{ را از طرف اعداد بزرگ تر از } 1 \text{ چه قدر}$$

باید به عدد 1 نزدیک کنیم؟
حل:

$$\frac{1}{300} < |(-4x + 3) + 1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4x + 4| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)| < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 4|x-1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{1200} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ تر از 1 به عدد 1 آن قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حد تابع در x_0

فرض می کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد). می گوئیم حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه ϵ دل خواه به L نزدیک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه δ کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $|f(x) - L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که $|x - x_0|$ را به اندازه δ کافی کوچک کنیم.

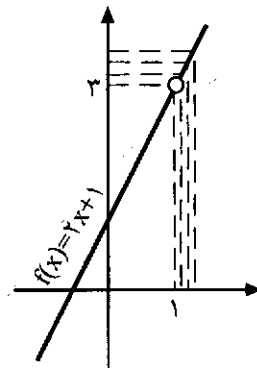
مثال: تابع با ضابطه $f(x) = 3x - 5$ را در نظر می گیریم. اگر $x \rightarrow 1$ ، آن گاه حد $f(x)$ برابر -2 است. می خواهیم

$$\frac{1}{100} < |f(x) + 2| < \frac{1}{100} \text{ باشد. } x \text{ را چه قدر باید به عدد } 1 \text{ نزدیک کنیم؟}$$

حل:

$$\frac{1}{100} < |f(x) + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 5 + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 3| < \frac{1}{100}$$

ملاحظه می کنیم، وقتی $x > 1$ و به عدد 1 نزدیک و نزدیک تر می شود، رفتار تابع نشان می دهد که مقدار تابع $(f(x))$ به عدد 3 نزدیک و نزدیک تر شده است. به نظر می رسد که وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه حد $f(x)$ برابر 3 است. از این جدول نتایج زیر به دست می آید:



$$0 < x-1 < 0.1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.2$$

$$0 < x-1 < 0.01 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.02$$

$$0 < x-1 < 0.001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.002$$

$$0 < x-1 < 0.0001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.0002$$

$$0 < x-1 < 0.00001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.00002$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد:

اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 0.2$ باشد، باید:

$$0 < x-1 < 0.1$$

اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 0.02$ باشد، باید:

$$0 < x-1 < 0.01$$

اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 0.002$ باشد، باید:

$$0 < x-1 < 0.001$$

اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 0.0002$ باشد، باید:

$$0 < x-1 < 0.0001$$

اگر بخواهیم $|f(x) - 3| < 0.00002$ باشد، باید:

$$0 < x-1 < 0.00001$$

می توان گفت: می توانیم $|f(x) - 3|$ را به هر اندازه که

بخواهیم، کوچک کنیم؛ به شرطی که x را از سمت راست به عدد 1 به اندازه δ کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می گیریم و

$x \rightarrow 1^+$ می خواهیم $\frac{1}{750} < |f(x) - 3| < \frac{1}{750}$ باشد. تعیین کنید x را

چه قدر باید به عدد 1 نزدیک کنیم.

حل:

$$\frac{1}{750} < |f(x) - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \frac{1}{750} \Rightarrow |2(x-1)| < \frac{1}{750}$$

$$\Rightarrow 2|x-1| < \frac{1}{750} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{1500} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1500}$$

قضیه ۷. اگر $\forall x \in \mathbb{R}$ و $f(x) \leq g(x)$ و f و g در a حد داشته باشند، آن گاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

قضیه ۸. حد یک تابع در $x = a$ در صورت وجود یکتاست. مثال: به کمک قضیه حد، حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 8x}{x^7 + 4x - 1}$

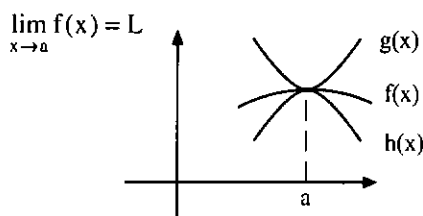
$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 8x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 + 4x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 - \lim_{x \rightarrow 1} 8x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 + \lim_{x \rightarrow 1} 4x - \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{1 - 8}{1 + 4 - 1} = \frac{-7}{4}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{x^7 - x + 4}{3x^7 + x + 4}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^7 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 4}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^7) + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 4}} = \sqrt[3]{\frac{1 - 1 + 4}{3 + 1 + 4}} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

قضیه فشردگی

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a ، $f(x)$ بین $g(x)$ و $h(x)$ باشد، هرگاه $g(x)$ و $h(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ دارای حد $L \in \mathbb{R}$ باشند، آن گاه:



مثال: اگر $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ باشد، می‌دانیم $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ و (با فرض $x > 0$) داریم: $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

آن گاه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

چنانچه $x < 0$ باشد، داریم: $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$ و:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

پس:

□ □ □

$$\Rightarrow |3(x-1)| < \frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{300}$$

$$0 < |x-1| < \frac{1}{300}$$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم که $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ بشود.

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ باشد، آن گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.

قضایای حد

قضیه ۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ باشد.

الف) $\lim_{x \rightarrow a} b = b$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

قضیه ۲. فرض می‌کنیم a, b, L_1 اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ باشد. آن گاه داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} b f(x) = b L_1$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$

د) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ با شرط $L_2 \neq 0$

قضیه ۳. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot 0 = 0$$

قضیه ۴. اگر $f(x) = m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m_n a^n + m_{n-1} a^{n-1} + \dots + m_1 a + m_0$$

قضیه ۵. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

قضیه ۶. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $L \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$