

در این مقاله سعی شده است، درباره تابعی مانند f ، موارد حد، پیوستگی، مشتق پذیری، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق، یکنوایی و اکیدا یکنوایی را به صورت شهودی بیان کنیم.

● احمد فندهاری

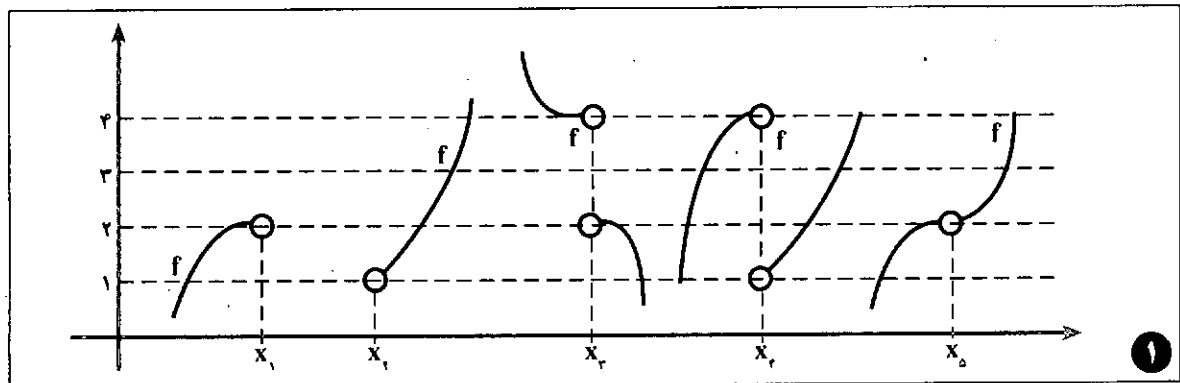
پیوستگی و مشتق پذیری به کمک نمودارها

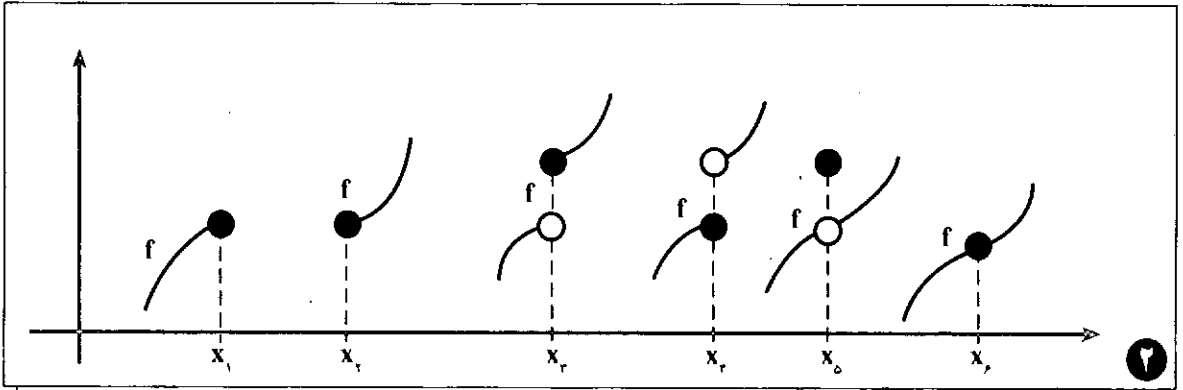
نتایج شکل

۱. تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد که مقدار آن در این نقطه عدد ۲ است.
۲. تابع f در x_2 فقط حد راست دارد که فقط آن در این نقطه ۱ است.
۳. تابع f در x_3 ، حد راست ۲ و حد چپ ۳ دارد. چون حد راست تابع در x_3 با حد چپ تابع در این نقطه برابر نیست، پس باز هم تابع در این نقطه حد ندارد.
۴. تابع f در x_4 ، حد راست ۱ و حد چپ ۳ دارد. ولی چون حد راست تابع برابر با حد چپ آن در x_4 نیست، باز هم تابع در x_4 حد ندارد.
۵. تابع f در x_5 ، حد راست و حد چپ دارد که هر دو برابر ۲ هستند. می گوئیم تابع در x_5 حد دارد.

حد تابع در یک نقطه

- الف) نقطه تو خالی را در نمودار تابع f ، نقطه حد گوئیم.
- ب) اگر در سمت چپ این نقطه تو خالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد چپ تابع f گوئیم.
- ج) چنانچه در سمت راست نقطه تو خالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد راست تابع f گوئیم.
- د) اگر در دو نقطه تو خالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد تابع گوئیم. به نمودارهای شماره ۱ زیر توجه کنید:

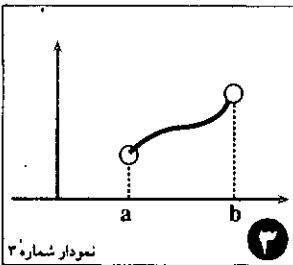




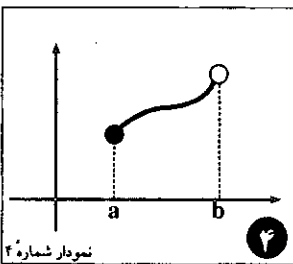
ندارد. می‌گوییم تابع f در x_5 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

۶. تابع f در x_6 ، حد دارد و مقدار تابع روی حد تابع قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_6 پیوسته است.

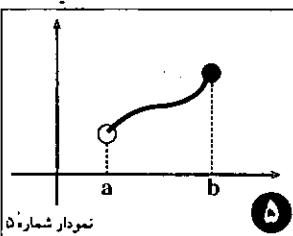
پیوستگی در یک بازه



۱. تابع f را در بازه $(a, b) \subset D_f$ وقتی پیوسته می‌گوییم که f در هر x ، $a < x < b$ پیوسته باشد. (نمودار شماره ۳)



۲. تابع f را در بازه $[a, b]$ وقتی پیوسته می‌گوییم که:
الف) f در هر x ، $a < x < b$ پیوسته باشد.
ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد. (نمودار شماره ۴)



۳. تابع f را در بازه $(a, b]$ وقتی پیوسته می‌گوییم که:
الف) f در هر x ، $a < x < b$ پیوسته باشد.
ب) f در b پیوستگی چپ باشد. (نمودار شماره ۵)

پیوستگی تابع در یک نقطه

الف) نقطه توپر (سیاه) شکل را مقدار تابع می‌گوییم.
ب) اگر مقدار تابع فقط روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.
ج) اگر مقدار تابع فقط روی حد راست، قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی راست دارد.
د) اگر مقدار تابع روی حد تابع قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است.
ه) اگر مقدار تابع روی نقطه حد تابع قرار نگیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.
به نمودارهای شماره ۲ توجه کنید:

نتایج شکل

۱. تابع f در x_1 ، حد راست ندارد و مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است، می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.
۲. تابع f در x_2 ، حد چپ ندارد و مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی راست دارد.
۳. تابع f در x_3 ، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_3 ، حد چپ دارد، ولی فقط پیوستگی راست دارد.
۴. تابع f در x_4 ، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_4 ، حد راست دارد، ولی فقط پیوستگی چپ دارد.
۵. تابع f در x_5 ، حد دارد، ولی مقدار تابع روی حد قرار

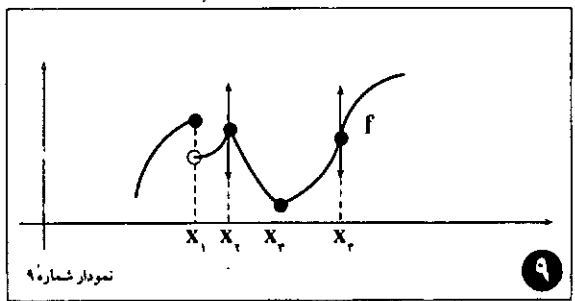
۲. اگر تابع f در بازه $[a, b] \subset D_f$ پیوسته و در بازه (a, b) هموار باشد، آن گاه تابع f در بازه (a, b) مشتق پذیر است.

سؤال: یک تابع مانند f در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟
جواب:

الف) در نقاطی که تابع در آن‌ها ناپیوسته باشد.
ب) در نقاطی که دو خط مماس بر منحنی f وجود داشته باشد.

ج) در نقاطی که خط مماس بر منحنی f موازی محور y ها باشد.

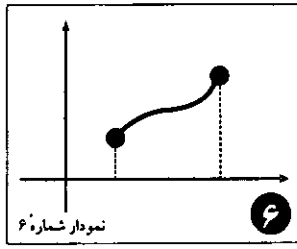
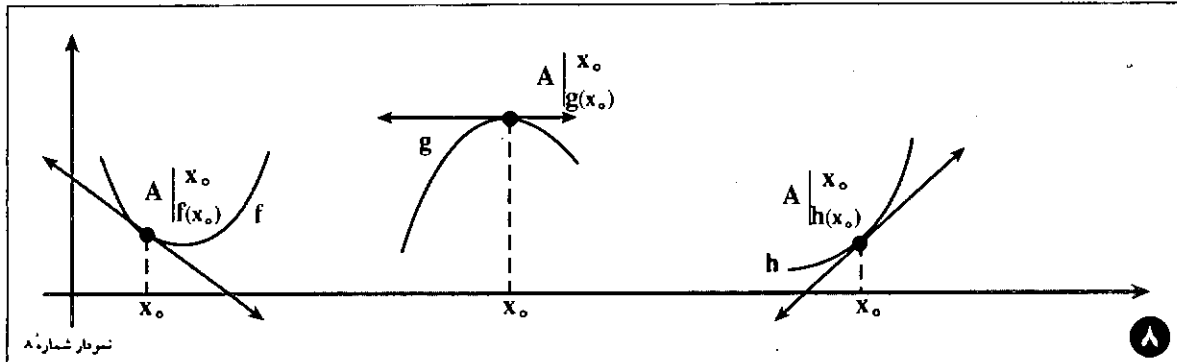
به نمودار شماره ۹ توجه کنید:



۱. تابع f در x_1 مشتق پذیر نیست؛ زیرا تابع f در x_1 ناپیوسته است.

۲. تابع f در x_2 مشتق پذیر نیست. زیرا منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول x_2 ، زاویه دار است. در نتیجه در این نقطه دو خط مماس بر منحنی f وجود دارد.

۳. تابع f در x_2 و x_4 مشتق پذیر نیست. زیرا خط‌های مماس بر منحنی تابع f در نقاطی به طول‌های x_2 و x_4 ، موازی محور y ها هستند.



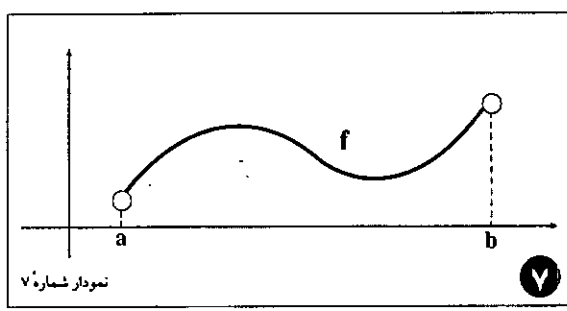
۴. تابع f در بازه $[a, b]$ وقتی پیوسته گوئیم که:
الف) f در هر $a < x < b$ پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد. (نمودار شماره ۶)

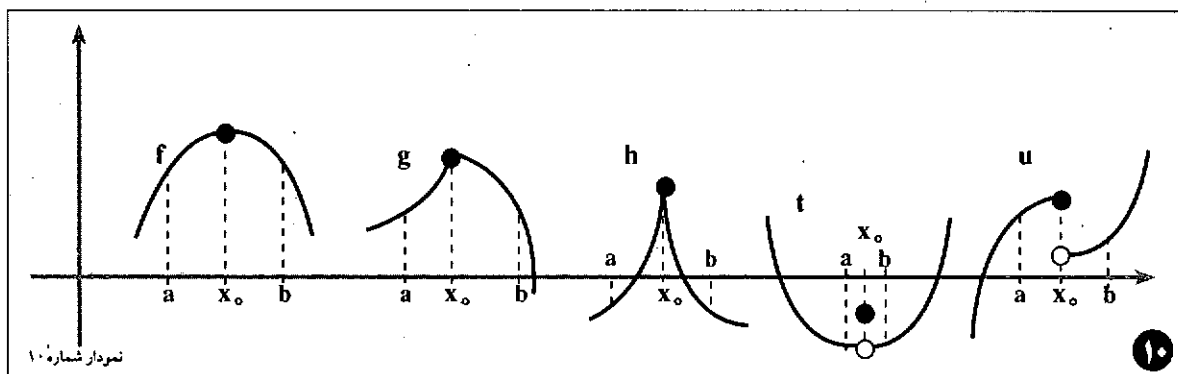
مشتق پذیری تابع در یک نقطه

قرارداد: نمودار تابع پیوسته f را در بازه $(a, b) \subset D_f$ وقتی هموار گوئیم که در هر نقطه $a < x < b$ بتوان فقط یک خط مماس بر منحنی f رسم کرد که موازی محور y ها نباشد.

شکل تابع f (نمودار شماره ۷)، نمونه یک تابع هموار در بازه (a, b) است.



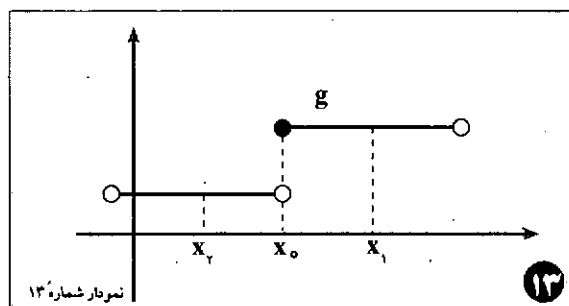
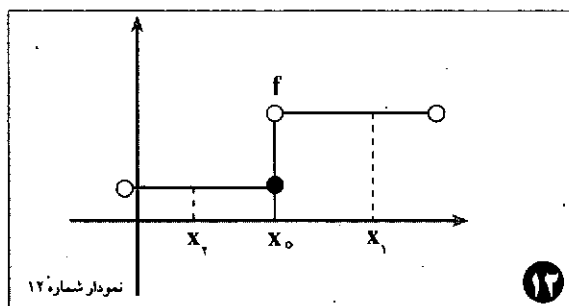
۱. تابع f را در نقطه پیوسته x_0 وقتی مشتق پذیر گوئیم که فقط و فقط یک خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه x_0 وجود داشته باشد، به طوری که آن خط، موازی محور y ها نباشد.
با توجه به تعریف (۱)، تابع‌های f, g, h ، (نمودارهای شماره ۸) در x_0 مشتق پذیرند.



اکسترمم نسبی

نقطه‌ای به طول x ، در تابع‌های f, g, h, t و u طول
مینیمم نسبی است.

سؤال. دو تابع f و g با نمودارهای ۱۲ و ۱۳ مفروضند:



نقاطی به طول‌های x_1, x_2 و x_0 در تابع‌های f و g دقیقاً
طول‌های چه نقاطی هستند؟

۱. نقطه‌ای به طول $x \in D_f$ را طول نقطه ماکزیمم نسبی
تابع f گوئیم؛ در صورتی که:

اولاً: در همسایگی x ، نمودار تابع f وجود داشته باشد.
ثانیاً: عرض نقطه x ، از عرض‌های نقاط همسایگی
بیش‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

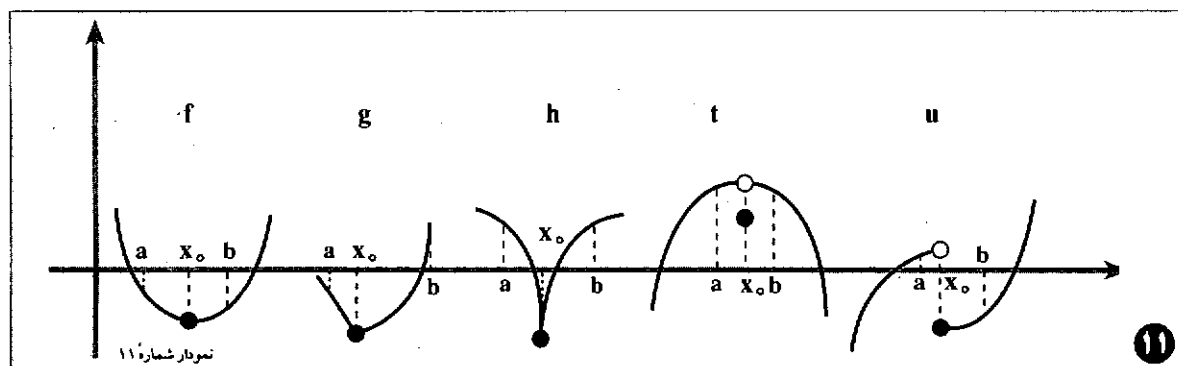
فرض می‌کنیم بازه (a, b) یک همسایگی x باشد
($a < x < b$). به نمودار شماره ۱۰ تابع‌های f, g, h, t و
 u توجه کنید.

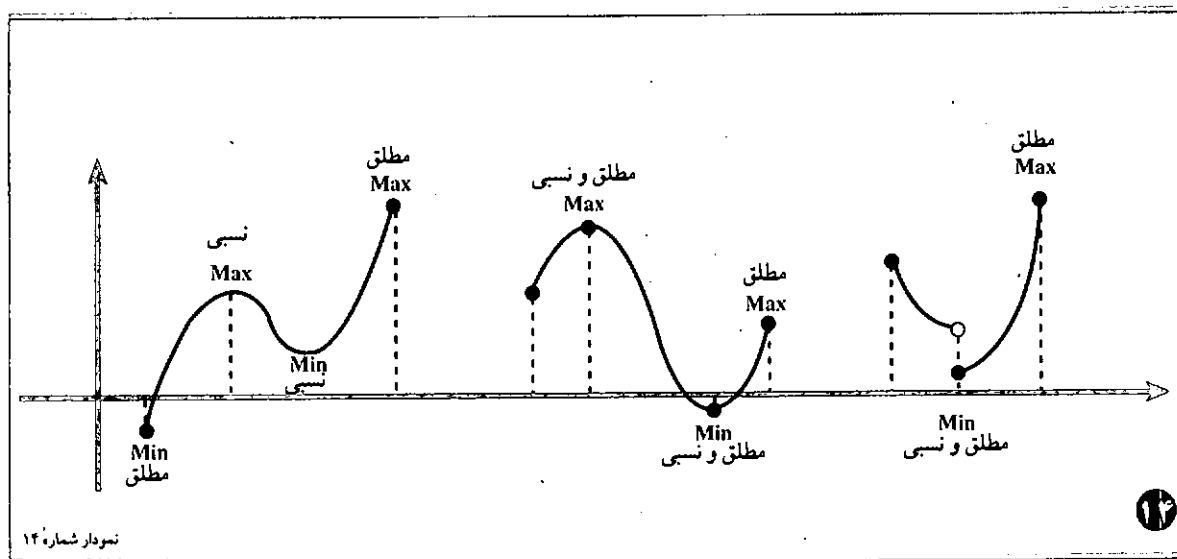
نقطه‌ای به طول x ، در تابع‌های f, g, h, t و u طول
ماکزیمم نسبی است.

۲. نقطه‌ای به طول $x \in D_f$ را طول نقطه مینیمم نسبی
تابع f گوئیم؛ در صورتی که:

اولاً: در همسایگی x ، نمودار تابع f وجود داشته باشد.
ثانیاً: عرض نقطه (a, b) از عرض‌های نقاط همسایگی
کم‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

فرض می‌کنیم بازه (a, b) یک همسایگی x باشد
($a < x < b$). به نمودارهای شماره ۱۱ توجه کنید:





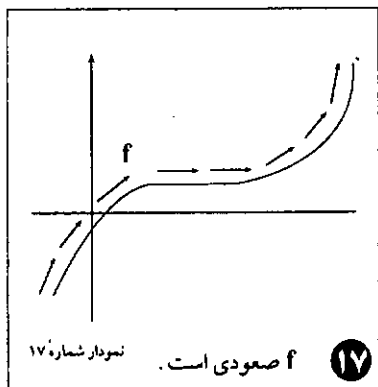
۱۴

گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف پائین بیاییم (نمودار شماره ۱۶).

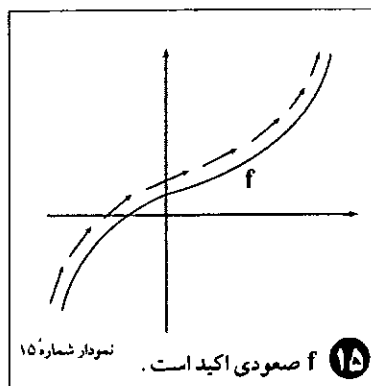
ماکزیمم و مینیمم مطلق

بالاترین نقطه نمودار تابع را ماکزیمم مطلق و پائین ترین نقطه نمودار تابع را مینیمم مطلق گوییم (نمودار شماره ۱۴).
تذکر: اگر ماکزیمم مطلق همسایگی داشته باشد، ماکزیمم نسبی هم خواهد بود، و اگر مینیمم مطلق همسایگی داشته باشد، مینیمم نسبی هم خواهد بود.

۳. نمودار تابع پیوسته f را وقتی صعودی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف بالا برویم و در قسمتی از

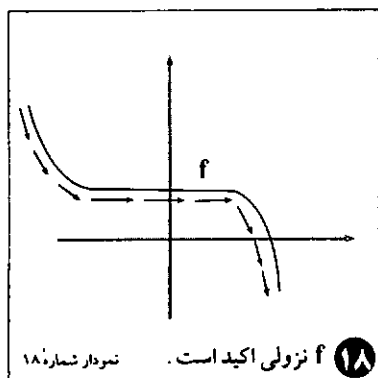


نمودار، حرکت افقی باشد (نمودار شماره ۱۷).

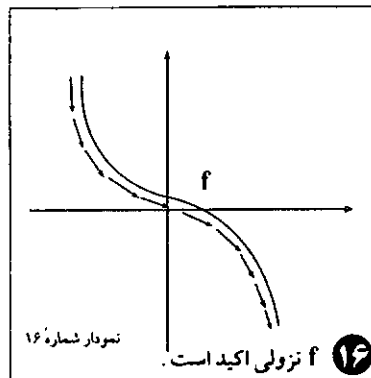


تابع اکیداً یکنوا

۱. نمودار تابع پیوسته f را وقتی صعودی اکید گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف بالا برویم (نمودار شماره ۱۵).



۴. نمودار تابع پیوسته f را وقتی نزولی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف پائین بیاییم و در قسمتی از نمودار، حرکت افقی باشد (نمودار شماره ۱۸).



۲. نمودار تابع پیوسته f را وقتی نزولی اکید