

134877 015 123013 134330 11345810 14501
 11409 04 10687 1234578 13257 133715 2618 33643210 147
 377 178903 3454 01966 1342381 1146819 33748 743957810
 01813 124 158570123 13458 39 8335 92456 1256821 58302
 1245980 9102 3485577 07574223 124931 023412 3457 07142183
 334781 876974 27185 1345775676 2134 01 1345680 23401
 4367 057421 00710 2270 23487910123 5823 30456 7850 154
 2354 113 0037 11567 9245 234579 02734 11234589 37288
 114012 456 13125 6789 12456 131 4518177 023127 2237
 0233450 123578 910 3357 123478 225 01010 0314561 07577
 55410 32361 03 2710



جزء صحیح

• علی حسن زاده ماکویی

$$\left(\left[\frac{7}{2}\right]\right)^2 = 9$$

(۴) ۱. هر عدد حقیقی مانند x را می توان به صورت مجموع یک عدد صحیح مانند n ($n \in \mathbb{Z}$) و عدد دیگری مانند a ($0 \leq a < 1$) نوشت.

$$\left[-\left(\frac{3}{\pi}\right)^2\right] = -1$$

(۵) مثال (۱) $x = 7/4$, $n = 7$, $x = 0/4$

$$-\left[\left(\frac{3}{\pi}\right)\right] = 0$$

(۶) $x = -12/7$, $n = -13$, $a = 0/3$

$$\left[(\sqrt{3}-2)^{2k-1}\right] = -1$$

(۷) $x = \sqrt{5}$, $n = 2$, $a = \sqrt{5}-2$

$$k \in \mathbb{N}, \left[(\sqrt{3}-2)^{2k}\right] = 0$$

(۸) جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با نماد $[x]$ نشان داده و آن را براکت می خوانند (Bracket). x هرگاه $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1$ آنگاه:

زیرا $-1 \leq a < 0 \Rightarrow [a] = -1$ و $0 \leq b < 1 \Rightarrow [b] = 0$

$$-1 < \sqrt{3}-2 < 0 \Rightarrow -1 < (\sqrt{3}-2)^{2k-1} < 0$$

$$0 < (\sqrt{3}-2)^{2k} < 1$$

یادآوری می شود که در مواردی (مثلاً محاسبه های رایانه ای) به کوچکترین عدد صحیح موجود در x که ناکوچکتر (بزرگتر یا مساوی) از x است، نیازمندیم. روی این اصل، دو نوع جزء صحیح برای هر عدد حقیقی مانند x تعریف کرده اند، بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از x را با نماد $[x]$ یا $\lfloor x \rfloor$ و کوچکترین عدد صحیح ناکوچکتر از x را با نماد $\lceil x \rceil$ نشان می دهند.

مثلاً

$$\lceil 1/4 \rceil = \lfloor 1/4 \rfloor = 1, \lceil 1/4 \rceil = 2$$

$$[x] = n$$

با توجه به مطالب فوق $[x]$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x و نابزرگتر (کوچکتر یا مساوی) از آن است. به مثالهای زیر توجه کنید.

$$\left[\frac{17}{3}\right] = 5 \quad (۱)$$

$$\left[-\frac{17}{3}\right] = -6 \quad (۲)$$

$$\left[\left(\frac{7}{2}\right)^2\right] = 12 \quad (۳)$$

$$[-12/4] = -13, \quad -[12/4] - 1 = -12 - 1 = -13$$

(۳) $[x+y] + 1$ یا $[x] + [y]$ برابر است با:

$$m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \leq x < m+1 \Rightarrow [x] = m \quad \text{زیرا}$$

$$n \leq y < n+1 \Rightarrow [y] = n, \quad m+n \leq x+y < m+n+2$$

$$m+n \leq x+y < m+n+1 \Rightarrow \quad \text{الف}$$

$$[x+y] = m+n = [x] + [y]$$

$$m+n+1 \leq x+y < m+n+2 \Rightarrow \quad \text{ب}$$

$$[x+y] = m+n+1 = [x] + [y] + 1$$

$$[2/3 + 7/4] = [9/4] = 2 \quad \text{مثال: الف}$$

$$[2/3] + [7/4] = 2 + 7 = 9$$

$$[5/6 + 11/7] = [17/3] = 5 \quad \text{ب}$$

$$[5/6] + [11/7] + 1 = 5 + 11 + 1 = 17$$

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] \quad (4)$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n \quad \text{زیرا:}$$

$$n \leq x < n + \frac{1}{2}, \quad n + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < n+1 \Rightarrow \quad \text{الف}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = n$$

$$2n \leq 2x < 2n+1 \Rightarrow [2x] = 2n = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

$$n + \frac{1}{2} \leq x < n+1, \quad n+1 \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2} \quad \text{ب}$$

$$2n+1 \leq 2x < 2n+2, \quad [x] = n, \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n+1 \quad \text{و}$$

$$[2x] = 2n+1 = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

$$[2 \times 7/8] = [14/8] = 1 \quad \text{مثال:}$$

$$[-7/8] = -1, \quad \left[-7/8 + \frac{1}{2}\right] = [-7/4] = -2$$

$$[2 \times 6/8] = [12/8] = 1 \quad \text{و}$$

$$[6/8] = 0, \quad \left[6/8 + \frac{1}{2}\right] = [7/4] = 1$$

$$[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] \quad (5)$$

$$\text{زیرا: } n + \frac{1}{3} \leq x < n + \frac{2}{3} \text{ یا } n + \frac{2}{3} \leq x < n+1$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq x < n + \frac{1}{3}$$

می‌توان رابطه فوق را اثبات کرد.

$$[3 \times 5/4] = [15/4] = 3 \quad \text{مثال:}$$

$$[-3/4] = [-3/4] = -1, \quad [-3/4] = -1$$

$$[\sqrt{2}-1] = [\sqrt{2}-1] = 0, \quad [\sqrt{2}-1] = 1$$

$$[1-\sqrt{3}] = [1-\sqrt{3}] = -1, \quad [1-\sqrt{3}] = 0$$

به طور کلی هرگاه، $n \in \mathbb{Z}, \quad n < x < n+1$ آنگاه:

$$[x] = [x] = n, \quad [x] = n+1$$

در بعضی از کتابهای ریاضی عدد $a - [a]$ (جزء ناصحیح a) را با نماد $\{a\}$ نشان می‌دهند، و به آن براسه (Brace) عدد a می‌گویند. واضح است که $0 < \{a\} < 1$.

۲. تابع $f(x) = [x]$ را که دامنه آن مجموعه عددهای حقیقی $(\mathbb{R})$ و بردش مجموعه عددهای صحیح نسبی و صفر $(\mathbb{Z})$ است تابع جزء صحیح می‌گویند. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

(در بعضی از کتابهای ریاضی تابع جزء صحیح را با نماد، $f(x) = E(x)$ نیز نشان داده‌اند).

۳. چند رابطه در مورد تابعهای جزء صحیح

$$m \in \mathbb{Z}, \quad [x+m] = [x] + m \quad (1)$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n \quad \text{زیرا:}$$

$$n+m \leq x+m < n+1+m \Rightarrow [x+m] =$$

$$n+m = [x] + m$$

$$[-7/6 + 1] = [-6/6] = -1 \quad \text{مثال:}$$

$$[-7/6 + 1] = [-7/6] + 1 = -1 + 1 = 0 \quad \text{و}$$

$$[22/4 - 5] = [17/4] = 4 \quad \text{و}$$

$$[22/4 - 5] = [22/4] - 5 = 5 - 5 = 0$$

$$m \in \mathbb{R}, \quad m \notin \mathbb{Z} \quad \text{دقت کنید که اگر}$$

$$[x+m] \neq [x] + m \quad \text{آنگاه}$$

$$([x] + m) \notin \mathbb{Z}, \quad [x+m] \in \mathbb{Z} \quad \text{زیرا}$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad x = n \Rightarrow [x] = n, \quad -x = -n \Rightarrow$$

$$[-x] = -n = -[x] \quad \text{زیرا}$$

$$n < x < n+1 \Rightarrow [x] = n, \quad -(n+1) < -x < -n \Rightarrow$$

$$[-x] = -n-1 = -[x]-1 \quad \text{و}$$

$$[-7] = -7 = -[7] \quad \text{مثال:}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = 0$$

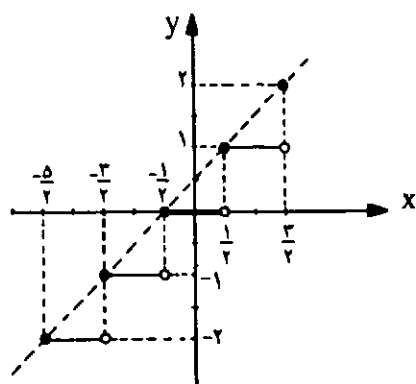
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 3$$

نمودار قبل همان نمودار $y = [x]$ است که به اندازه یک واحد روی محور y ها تغییر مکان یافته است.

به طور کلی برای رسم نمودار $y = [x]$ کافی است نمودار $y = [x]$ را به اندازه n واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



$$y = \left[x + \frac{1}{2} \right], \quad x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

$$-\frac{5}{2} \leq x < -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -2$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -1$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow y = 1$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2$$

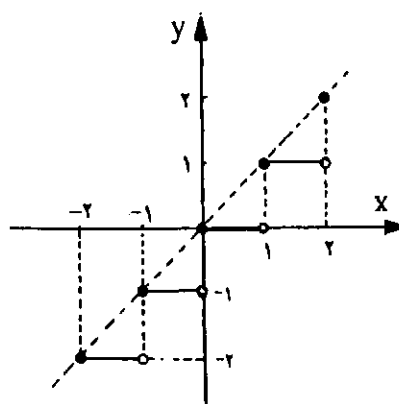
ملاحظه می شود که نمودار فوق همان نمودار $y = [x]$ است که به اندازه $\left(-\frac{1}{2}\right)$ روی محور x ها تغییر مکان داده شده است. به طور کلی هرگاه m عدد صحیح نباشد ($m \notin \mathbb{Z}$) آنگاه برای رسم نمودار $y = [x + m]$ کافی است نمودار $y = [x]$ را به اندازه m قرینه روی محور x ها تغییر مکان دهیم. یادآوری می شود که در حالت کلی برای رسم نمودار $y = f(x + \alpha)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازه α قرینه روی محور x ها تغییر مکان دهیم.

$$[-5/4] = -6, \quad \left[-5/4 + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{-76}{12}\right] = -6 \quad \text{و}$$

$$\left[-5/4 + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{-71}{12}\right] = -6 \quad (-6) + (-6) + (-5) = -17$$

۴. رسم نمودار تابع جزء صحیح

جهت آشنا شدن با رسم نمودار تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند، به مثالهای زیر توجه کنید.



$$y = [x], \quad x \in [-2, 2] \quad (1)$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -2$$

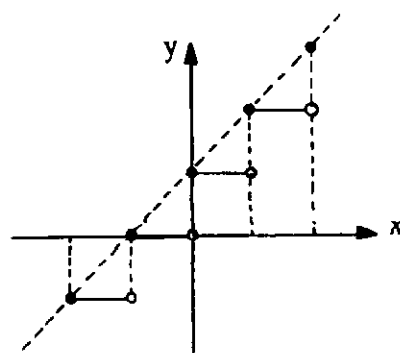
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$

نقطه های پر جزو نمودار هستند و نقطه های تو خالی جزو نمودار نیستند.

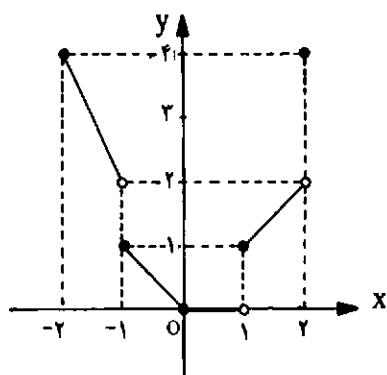


$$y = [x + 1], \quad x \in [-2, 2] \quad (2)$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$



$$y = x \cdot [x], \quad x \in [-2, 2]$$

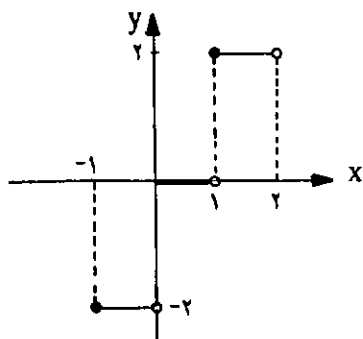
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -2x$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

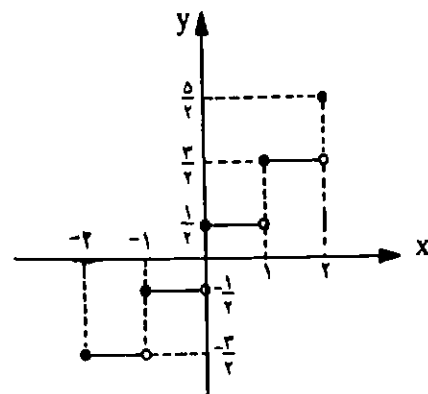
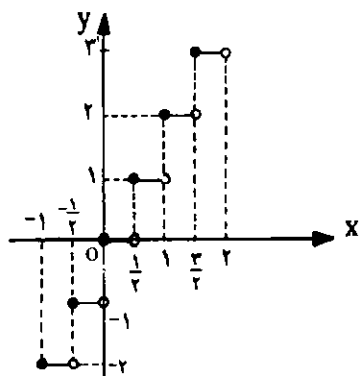


$$y = 2[x], \quad x \in [-1, 2)$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -2$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 2$$



$$y = [x] + \frac{1}{4}, \quad x \in [-2, 2]$$

(4)

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}$$

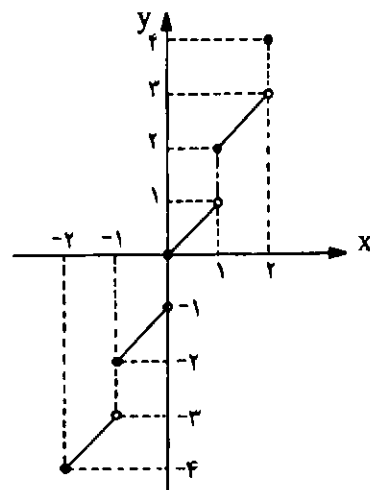
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

بطوری که ضمن مسأله ۲ بیان شد برای رسم نمودار تابع فوق کافی است نمودار $y = [x]$ به اندازه $\frac{1}{4}$ واحد روی محور y ها تغییر مکان دهیم.



$$y = x + [x], \quad x \in [-2, 2]$$

(5)

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = x - 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = x - 1$$

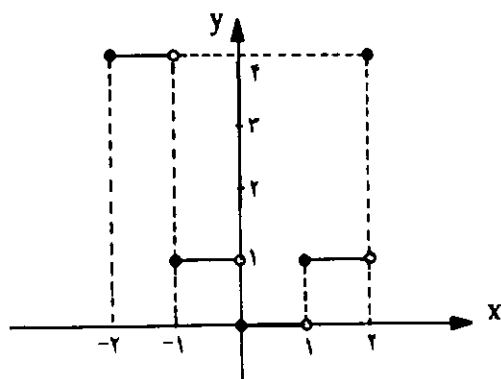
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow y = 1$$

$$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow y = 2$$

$$\sqrt{3} \leq x < 2 \Rightarrow y = 3$$



$$y = ([x])^2, x \in [-2, 2]$$

(12)

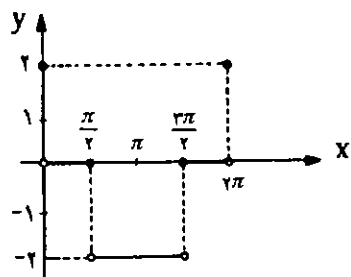
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = 4$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$



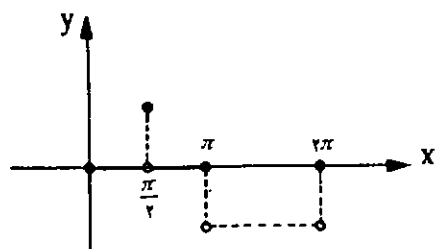
$$y = 2[\cos x], x \in [0, 2\pi]$$

(13)

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \Rightarrow [\cos x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow [\cos x] = -1 \Rightarrow y = -2$$

$$x = 0 \cup x = 2\pi \Rightarrow [\cos x] = 1 \Rightarrow y = 2$$



$$y = [2x], x \in [-1, 2]$$

(14)

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2$$

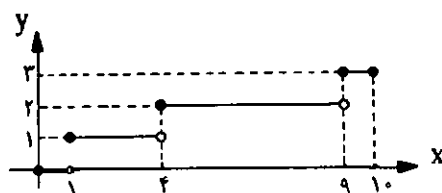
$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow y = 3$$

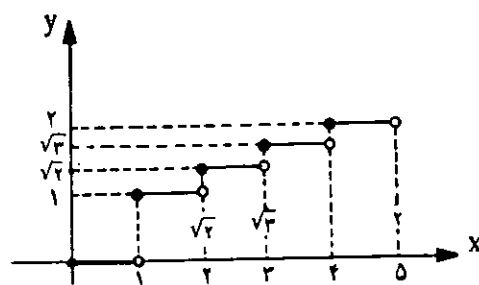


$$y = [\sqrt{x}], x \in [0, 10]$$

(15)

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0, 1 \leq x < 4 \Rightarrow y = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow y = 2, 9 \leq x \leq 10 \Rightarrow y = 3$$



$$y = \sqrt{[x]}, x \in [0, 10]$$

(16)

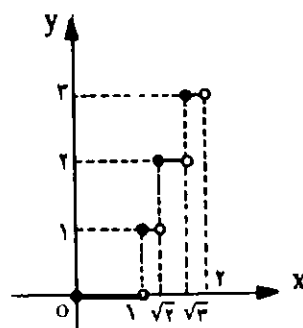
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

$$4 \leq x < 10 \Rightarrow y = 2$$

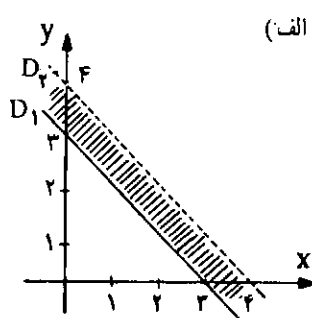
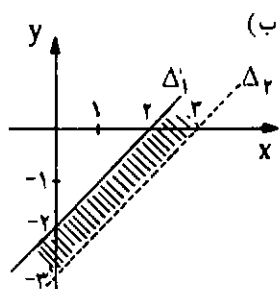


$$y = [x^2], x \in [0, 2]$$

(17)

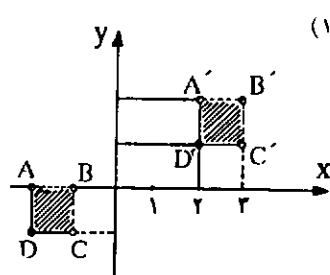
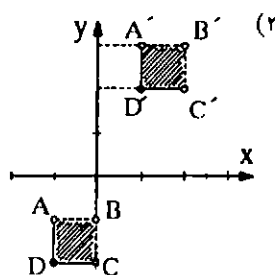
$$\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ 1 \leq y < 2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ -1 \leq y < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq y < 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ -2 \leq y < -1 \end{cases} \quad (۲)$$



مجموعه نقطه‌های هاشور خورده و خط D_1 نمودار رابطه الف است.

مجموعه نقطه‌های هاشور خورده و خط Δ_1 نمودار رابطه ب است.



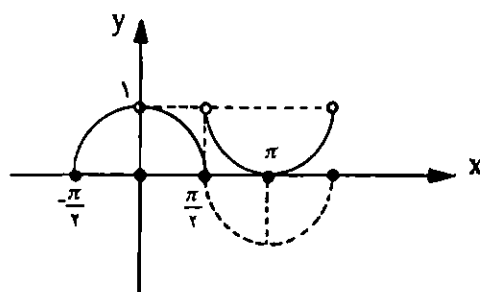
مجموعه نقطه‌های مربعهای ABCD و $A'B'C'D'$ به غیر از قطعه خطهای AB و BC و $A'B'$ و $B'C'$ شکل (۱) یا شکل (۲) نمودار رابطه ب است.

$$y = \frac{\pi}{2} [\sin x], \quad x \in [0, 2\pi] \quad (۱۴)$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow [\sin x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\pi < x < 2\pi \Rightarrow [\sin x] = -1 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \quad x = 2\pi \Rightarrow y = 0$$

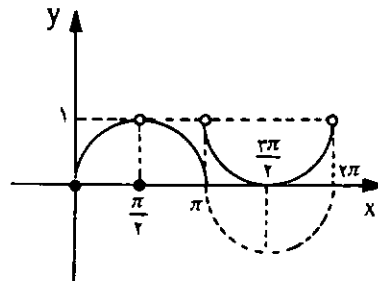


$$y = \cos x - [\cos x], \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad (۱۵)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \quad \text{یا} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos x < 1 \Rightarrow y = \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq \cos x < 0 \Rightarrow y = \cos x + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow y = 0, \quad x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = 0$$



$$y = \sin x - [\sin x], \quad x \in [0, 2\pi] \quad (۱۶)$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \Rightarrow y = \sin x, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$\pi < x < 2\pi \Rightarrow y = \sin x + 1, \quad x = 2\pi \Rightarrow y = 0$$

(۱۷) بررسی رسم نمودار چند رابطه

الف. $[x+y]=3$ ب. $[x-y]=2$ ب. $[x].[y]=2$

$$[x+y]=3 \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 & D_1: x+y=3 \\ x+y < 4 & D_2: x+y=4 \end{cases}$$

$$[x-y]=2 \Rightarrow \begin{cases} x-y \geq 2 & \Delta_1: x-y=2 \\ x-y < 3 & \Delta_2: x-y=3 \end{cases}$$

$$[x] = \pm 1, [y] = \pm 2. (۲) [x] = \pm 2, [y] = \pm 1. (۱)$$

تمرین

۱. اگر $(2+\sqrt{3})^5 + (2-\sqrt{3})^5 = 724$ ، آنگاه $[(2+\sqrt{3})^5]$ چقدر است؟

دامنه تعریف هریک از تابعهای زیر را تعیین کنید.

$$g(x) = \frac{|x|}{[x]}, \quad ۳ \quad f(x) = \frac{[x]}{|x|}, \quad ۲$$