

جزء صحیح

(قسمت سوم)

• علی حسن زاده ماکویی

$$[\cot x] = 1 \Rightarrow 1 \leq \cot x < 2 \Rightarrow \operatorname{Arccot} 2 < x \leq \frac{\pi}{4}$$

۴. مجموعه جواب نابرابری $|1-x| < 2$ کدام است؟

(۱) $[-2, -1]$ (۲) $(-1, 3)$

(۳) $(-2, 2)$ (۴) $[1, 2]$

حل: گزینه دوم صحیح است.

$$|1-x| < 2 \Rightarrow -2 < 1-x < 2 \text{ یا } -3 < -x < 1 \text{ یا } x \in (-1, 3)$$

۵. به ازای کدام مجموعه m رابطه $x^2 - 3x - [m] > 0$ همواره برقرار است.

(۱) $(-2, 3)$ (۲) $(-1, 2)$

(۳) $(-\infty, 2)$ (۴) $(-\infty, -2)$

حل: گزینه چهارم صحیح است.

$$\Delta < 0 \text{ یا } 9 + 4[m] < 0 \Rightarrow [m] < -\frac{9}{4}$$

ب - چند مثال، در مورد نابرابری جزء صحیح دار

۱. مجموعه جواب نابرابری $|x+2| - 2 \leq 1$ در دامنه Z چند عضو دارد؟

حل: $-1 \leq [x] \leq 1$ یا $-2 \leq x+2 \leq 1$

$$[x] \leq 1 \Rightarrow x < 2, [x] \geq -1 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

$$\Rightarrow n = 2 - (-1) = 3, x \in \{-1, 0, 1\}$$

۲. مجموعه جواب نابرابری $2x+1 \leq -4$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, -3]$ (۲) $(-\infty, -2]$

(۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-\infty, -3)$

حل: گزینه سوم صحیح است.

$$2x+1 \leq -4 \Rightarrow 2x+1 < -3 \text{ یا } x < -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2)$$

۳. در دامنه $(0, \pi)$ مجموعه جواب نابرابری $2 < [\cot x] \leq 0$ کدام است؟

حل: $[\cot x] = 0 \Rightarrow 0 \leq \cot x < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$

حل:

$$\Rightarrow m < -2 \Rightarrow m \in (-\infty, -2)$$

پ - حد تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند

یادآوری: تابع، $y = [f(x)]$ وقتی $x \rightarrow x_1$ و $x_1 \in \mathbb{R}$

دارای حد است که $f(x_1) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ یا $f(x_1) \in \mathbb{Z}$ به عنوان

مثال، تابع $\left[\frac{2x+4}{5}\right]$ وقتی که $x \rightarrow 3$ فاقد حد است؛ زیرا

$$f(3) = [2] = 2 \in \mathbb{Z}$$

به مثالهای زیر توجه کنید.

مقدار هریک از عبارتهای زیر را معین کنید.

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} [3x - 1]$$

حل:

$$x \rightarrow \frac{1}{3}^-, \quad x = \frac{1}{3} - \frac{1}{n},$$

حل:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} [3x - 1] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{n} \right] = -1$$

$$x \rightarrow \frac{1}{3}^+, \quad x = \frac{1}{3} + \frac{1}{n},$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} [3x - 1] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{n} \right] = 0$$

تابع $[3x - 1]$ وقتی که $x \rightarrow \frac{1}{3}$ فاقد حد است. زیرا $L_1 \neq L_2$.

$$2. L = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} ([x + 2] \cdot [1 - x])$$

حل:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2 + [x]) \cdot (1 + [-x])$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [-x] = -1 \Rightarrow L = (2 + 0)(1 - 1) = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{([x])^2 - 25}{x^2 - 25}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{([x])^2 - 25}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{4^2 - 25}{x^2 - 25}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-9}{x^2 - 25} = +\infty$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{([x])^2 - 25}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{5^2 - 25}{x^2 - 25} = 0$$

تابع حد ندارد؛ زیرا $L_1 \neq L_2$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[x - 3] + x - 5}{x^2 - 16}$$

حل:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x - 3] + x - 5}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{0 + x - 5}{x^2 - 16} = +\infty$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{[x - 3] + x - 5}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1 + x - 5}{x^2 - 16}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x + 4} = \frac{1}{8}$$

تابع مفروض، وقتی که $x \rightarrow 4$ فاقد حد است؛ زیرا $L_1 \neq L_2$.

۵. تحقیق کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\cos x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\cos x] = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [\sin x] = -1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\cot x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\cot x] = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [\log x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} [\log x] = -1 \quad (4)$$

یادآوری می شود که هرگاه (ε) یک عدد حقیقی مثبت

بسیار کوچکی فرض شود، داریم:

$$x = 1 + \varepsilon \Rightarrow 0 < \log x < 1 \Rightarrow [\log x] = 0$$

$$x = 1 - \varepsilon \Rightarrow -1 < \log x < 0 \Rightarrow [\log x] = -1 \quad \text{و}$$

ت - پیوستگی تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند
تابع، $y = [f(x)]$ در دامنه $f(x) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است.

چند مثال

پیوستگی تابعهای زیر را در نقطه مفروض بررسی کنید.
۱. $x = x_1 \in \mathbb{R}$ در نقطه $y = [x + n] - [x]$ و $n \in \mathbb{Z}$.

حل: $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = [x] + n - [x] \Rightarrow y = n$
تابع در دامنه $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲. $x = 2$ و $f(2) = -3$ و $f(x) = \begin{cases} [x], & x < 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$.

حل: $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$,

$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 3) = 1$

تابع پیوسته نیست. $L_1 = L_2 \neq f(2) \Rightarrow$

۳. تابع $f(x) = \begin{cases} \text{Sgn}(x+1), & x < 2 \\ [mx+2], & x = 2 \\ |x-3|, & x > 2 \end{cases}$ را در نظر می گیریم.

مجموعه m را چنان معین کنید که $y = f(x)$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

یادآوری: تابع $g(x) = \text{Sgn} x$ که به تابع علامت مشهور است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

حل: $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \text{Sgn}(3) = 1$,

$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = |-1| = 1$

$f(2) = [2m] + 2 = 1$ یا $[2m] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2m < 0$

$\Rightarrow m \in [-\frac{1}{2}, 0)$

$$x = 1 \Rightarrow [\log x] = 0$$

۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} [1 - 2x]$ کدام است؟

$$-2(1) \quad -3(2) \quad -4(3) \quad -4(4) \quad \text{موجود نیست}$$

حل: گزینه دوم صحیح است.

$$x = 2 - \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} [1 - 2x] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [1 - 4 + 2\varepsilon] \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-3 + 2\varepsilon] = -3$$

۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (a^{[x]} - 2)$ و $a > 0$ کدام است؟

$$-2(1) \quad -1(2) \quad 1(3) \quad -1(4)$$

حل: گزینه چهارم صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^{[x]} - 2) = (1 - 2) = -1$$

۸. مقدار $L = \lim_{x \rightarrow -2^+} (|x| - [x])$ کدام است؟

$$-1(4) \quad -2(3) \quad 3(2) \quad 4(1)$$

حل: گزینه اول صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [x] = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} |x| = 2, \quad L = 2 - (-2) = 4$$

۹. مقدار $L = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x + 1 - [1 - 2x]]$ کدام است؟

$$4(4) \quad 3(3) \quad 2(2) \quad 1(1)$$

حل: گزینه دوم صحیح است.

$$f(x) = [x + 1 - [1 - 2x]] = [x + 1] - [1 - 2x] \\ = [x] - [-2x]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 - (-2) = 2$$

۱۰. مقدار $L = \lim_{x \rightarrow \pi^+} [2 + \sin x]$ کدام است؟

$$2(4) \quad 1(3) \quad -1(2) \quad -2(1)$$

حل: گزینه سوم صحیح است.

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (2 + [\sin x]) = 2 - 1 = 1$$

$$= x - [x] + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x]\right) = f(x)$$

ب. تابع در بازه $[3, 6]$ در نقطه $x = 6$ ناپیوسته است. در نتیجه، در بازه مزبور، فقط در یک نقطه ناپیوسته می باشد. توجه دارید که $f(x)$ در نقطه $x = 3$ پیوستگی راست دارد.

تمرین

۱. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} [3x+1]$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۳

۲. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} [2x+3]$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴) ۶

۳. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} ((3-x) + x^2 + 2x)$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

۴. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} ((2-x) + 5x^2 + 3)$ کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۴۶

۵. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[2x - [x + 3]]}{x - 3}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} ([x] + \text{Sgn}(x-2) + x)$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) هیچ کدام

۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} (3x + [x] + \text{Sgn}(2x-1))$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $2 - \frac{1}{4}$ (۳) $3 - \frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۸. در کدام یک از مجموعه های زیر، تابع $f(x) = \frac{3x+1}{[x]-1}$ و

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است؟

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} - [1, 2)$ (۴) $[1, 2)$

۹. تابع $f(x) = [x] - [x-2]$ و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در کدام یک از

مجموعه های صفحه بعد پیوسته است؟

۴. تابع $f(x) = \frac{x^2}{x - [x]}$ در کدام مجموعه پیوسته است؟

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

حل: گزینه چهارم صحیح است.

$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \neq x \Rightarrow x - [x] \neq 0 \Rightarrow$ شرط پیوستگی

۵. تابع $f(x) = x - [x] + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x]\right)$ را در نظر می گیریم.

الف. نمودار $f(x)$ را در بازه $x \in [0, 6]$ رسم و تحقیق کنید

که $f(x)$ متناوب بوده و دوره تناوب آن $T = 4$ است.

ب. تعیین کنید $f(x)$ در بازه $[3, 6]$ در چند نقطه ناپیوسته است.

حل: الف. $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 + \sin \frac{\pi}{4} = x$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = x - 2 + \sin \pi = x - 2$

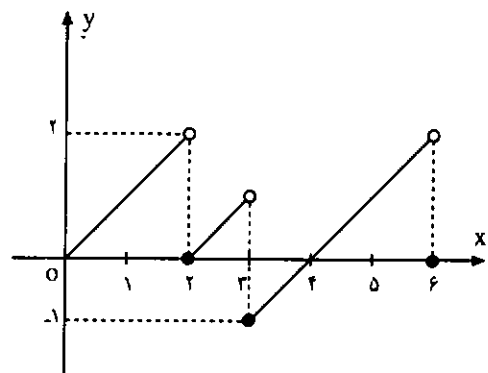
$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3$,

$f(x) = x - 3 + \sin \frac{3\pi}{4} = x - 4$

$4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow f(x) = x - 4 + \sin 2\pi = x - 4$

$5 \leq x < 6 \Rightarrow [x] = 5 \Rightarrow f(x) = x - 5 + \sin \frac{5\pi}{4} = x - 4$

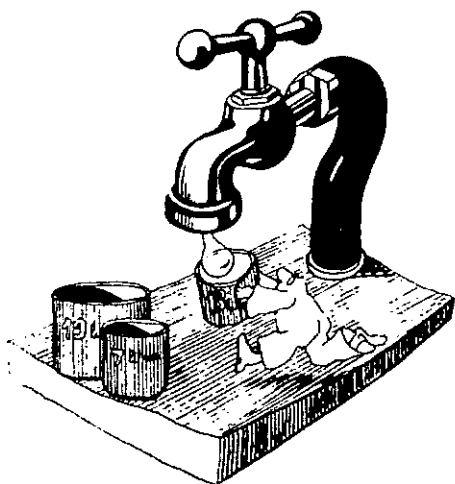
$x = 6 \Rightarrow [x] = 6 \Rightarrow f(x) = 0$.



$f(x+4) = x + 4 - [x+4] + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x+4]\right)$



تفریح اندیشه ۴



مهرداد جلوی یک شیر آب است. او سه ظرف خالی ۱۹ لیتری، ۱۳ لیتری و ۷ لیتری در اختیار دارد. مهرداد می‌خواهد در هر یک از دو ظرف اول ۱۰ لیتر آب داشته باشد.

برای انجام این کار چند عمل لازم است؟ ضمن آنکه حتی یک قطره آب نباید به خارج از ظرفها بریزد.

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

$$\mathbb{R}^- (۴) \quad \mathbb{R}^+ (۳) \quad \mathbb{R} (۲) \quad \mathbb{R}-\mathbb{Z} (۱)$$

$$۱۰. \text{تابع } \begin{cases} \text{Sgn}(\sin x), & x > \pi \\ [\sin x], & x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases} \text{ در نقطه } x = \pi \text{ چگونه است؟}$$

(۱) دارای حد است (۲) پیوستگی چپ دارد

(۳) پیوستگی راست دارد (۴) پیوسته است

۱۱. مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ و } f(x) = [2x] - |x - 2|$$

کدام است؟

$$\{x | \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\} (۲) \quad \{x | x \in \mathbb{Z}\} (۱)$$

$$\{x | x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\} (۴) \quad \{x | 2x \in \mathbb{Z}\} (۳)$$

$$۱۲. \text{مجموعه نقطه‌های ناپیوستگی تابع } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{2x-7}{[x]-3}$$

کدام است؟

$$\{3, 4\} (۴) \quad \{3\} (۳) \quad (3, 4) (۲) \quad [3, 4) (۱)$$

پاسخ تمرینها

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
پاسخ	۲	۱	۴	۴	۱	۳	۳	۳	۲	۲	۳	۱

