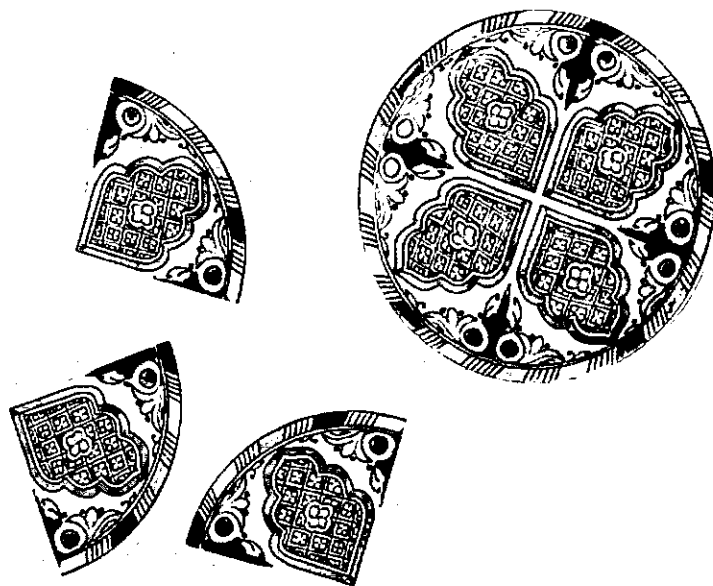


جزء صحیح

(قسمت چهارم)

● علی حسن زاده ماکویی



$$۲. \text{تابع } f(x) = \begin{cases} [x] + 2x & , x > 1 \\ [\ln(4x^2 + 1)] & , 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - x - 6| & , x \leq 0 \end{cases} \text{ را در نظر}$$

می گیریم.

مقدار عبارت $A = f'(-3) + f'(\frac{1}{4}) + f'(\frac{5}{4})$ چه قدر است؟

$$-۵ \quad (۴) \quad ۹ \quad (۳) \quad ۶ \quad (۲) \quad -۷ \quad (۱)$$

حل: گزینه چهارم صحیح است.

$$x = -3, f(x) = x^2 - x - 6, f'(x) = 2x - 1, f'(-3) = -7$$

$$x = \frac{1}{4}, f(x) = [\ln 2], f'(\frac{1}{4}) = 0$$

$$x \rightarrow \frac{5}{4}, f(x) = 2 + 2x, f'(\frac{5}{4}) = 2 \Rightarrow A = -5$$

ج- انتگرال تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند.

یادآوری می شود که تابع $y = [f(x)]$ وقتی که $f(x) \in \mathbb{Z}$

نایبسته می باشد. بنابراین، در انتگرال گیری تابعهایی که شامل

جزء صحیح هستند، باید دقت بیشتری کرد و برای تعیین انتگرال

تابعهای به صورت $I = \int_p^q [nx] dx$ باید I را به انتگرالهای جزء

ث- مشتق تابع $y = [g(x)]$

تابع y در مجموعه $g(x) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.

چند مثال

۱. تابع $f(x) = [\frac{2x+1}{3}]$ را در نظر می گیریم. در بازه $[0, 8]$

به ازای چند عدد متعلق به مجموعه $\mathbb{Z}$ ، تابع $f(x)$ مشتق پذیر است؟
حل:

$$\frac{2x+1}{3} = u \text{ و } 0 \leq x < 8 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq u < \frac{17}{3}$$

$$\frac{1}{3} \leq u < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \text{ و } f'(x) = 0, x_1 = 0$$

$$1 < u < 2 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{2} \text{ و } f'(x) = 0, x_2 = 2$$

$$2 < u < 3 \Rightarrow \frac{5}{2} < x < 4 \text{ و } f'(x) = 0, x_3 = 3$$

$$3 < u < 4 \Rightarrow 4 < x < \frac{11}{2} \text{ و } f'(x) = 0, x_4 = 5$$

$$4 < u < 5 \Rightarrow \frac{11}{2} < x < 7 \text{ و } f'(x) = 0, x_5 = 6$$

$$5 < u < \frac{17}{3} \Rightarrow 7 < x < 8 \text{ و } f'(x) = 0$$

ریشه ندارد،
با توجه به مطالب بالا در بازه $[0, 8]$ به ازای پنج عدد صحیح تابع مشتق پذیر است.

به صورت $n \in \mathbb{Z}$ و $\int_{a_1}^{b_1} [nx] dx$ تبدیل کرد؛ به قسمی که

$$I = \int_a^b [x] \sin\left(\frac{\pi x}{\rho}\right) dx \quad ۵.$$

حل:

$$I_1 = \int_0^1 (0) \sin \frac{\pi x}{\rho} dx, \quad I_2 = \int_1^2 (1) \sin \frac{\pi x}{\rho} dx, \dots,$$

$$I_\rho = \int_0^\rho \Delta \sin \frac{\pi x}{\rho}$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_\rho = \frac{\rho}{\pi}$$

$$I = \int_0^x [e^x] dx \quad ۶.$$

$$0 \leq x < \text{Ln} 2 \Rightarrow 1 \leq e^x < 2 \Rightarrow [e^x] = 1, \quad \text{حل:}$$

$$I_1 = \int_0^{\text{Ln} 2} (1) dx$$

$$\text{Ln} 2 \leq x < \text{Ln} 3 \Rightarrow 2 \leq e^x < 3 \Rightarrow [e^x] = 2,$$

$$I_2 = \int_{\text{Ln} 2}^{\text{Ln} 3} (2) dx$$

.....

$$\text{Ln} v \leq x \leq 2 \Rightarrow v \leq e^x \leq e^2 \Rightarrow [e^x] = v,$$

$$I_v = \int_{\text{Ln} v}^v (v) dx$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_v = 1^2 - \text{Ln}(v!)$$

$$I = \int_1^{n+1} \text{Ln}[x] dx, \quad n \in \mathbb{N} \quad ۷.$$

$$I_1 = \int_1^2 \text{Ln}(1) dx, \quad I_2 = \int_2^3 \text{Ln}(2) dx, \dots, \quad \text{حل:}$$

$$I_n = \int_n^{n+1} \text{Ln}(n) dx$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \text{Ln}(1) \times 2 \times \dots \times n = \text{Ln}(n!)$$

$$I = \int_1^x [x^r] dx \quad ۸.$$

حل:

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{r}} dx, \quad I_2 = \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{r+1}} r dx, \quad I_3 = \int_{\sqrt{r+1}}^{\sqrt{r+2}} r dx \Rightarrow$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \Delta - (\sqrt{r} + \sqrt{r+1})$$

$$۹. \text{ مقدار } I = \int_1^{e^2} \frac{[\text{Ln} x]}{x-1} dx \text{ کدام است؟}$$

$$\text{Ln}(e+1) \quad (۲) \quad \text{Ln}(e^2-1) \quad (۱)$$

$$\text{Ln}(e-1) \quad (۴) \quad \text{Ln}(e^2-1)-1 \quad (۳)$$

حل: گزینه دوم صحیح است.

$$I = \int_1^e \frac{0}{x-1} dx + \int_e^{e^2} \frac{dx}{x-1} = 0 + \text{Ln}(x-1) \Big|_e^{e^2} \Rightarrow$$

$\frac{1}{n}$ برابر $(b_1 - a_1)$ باشد.

چند مثال

مقدار عبارتهای زیر را تعیین کنید.

$$۱. I = \int_{-1}^2 [x] dx$$

$$I = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 (0) dx + \int_1^2 (1) dx \Rightarrow \quad \text{حل:}$$

$$I = (-x) \Big|_{-1}^0 + (0) + (x) \Big|_1^2 = -1 + (2-1) = 0$$

$$۲. I = \int_{-1}^1 [2x] dx$$

حل:

$$I = \int_{-1}^{-0.5} [2(-1)] dx + \int_{-0.5}^0 [2(-0.5)] dx + \int_0^{0.5} [2(0)] dx$$

$$+ \int_{0.5}^1 [2(0.5)] dx = (-2x) \Big|_{-1}^{-0.5} + (-x) \Big|_{-0.5}^0 + (x) \Big|_{0.5}^1$$

$$= (1-2) + (0-0.5) + (1-0.5) = -1$$

$$۳. I = \int_{-1}^1 [2x-1] dx$$

حل:

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow [2x-1] = -3,$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow [2x-1] = -2$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow [2x-1] = -1,$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow [2x-1] = 0 \Rightarrow$$

$$I = \int_{-1}^{-0.5} (-3) dx + \int_{-0.5}^0 (-2) dx + \int_0^{0.5} (-1) dx \Rightarrow$$

$$I = \left(-\frac{3}{2}\right) + (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$۴. I = \int_1^{e^2} \frac{[\text{Ln} x]}{x} dx$$

حل:

$$1 \leq x < e \Rightarrow 0 \leq \text{Ln} x < 1 \Rightarrow [\text{Ln} x] = 0$$

$$e \leq x \leq e^2 \Rightarrow 1 \leq \text{Ln} x < 2 \Rightarrow [\text{Ln} x] = 1$$

$$e^2 \leq x < e^3 \Rightarrow 2 \leq \text{Ln} x < 3 \Rightarrow [\text{Ln} x] = 2$$

$$I = \int_1^e \left(\frac{0}{x}\right) dx + \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{2}{x}\right) dx \Rightarrow$$

$$I = 0 + (\text{Ln} x) \Big|_e^{e^2} + 2(\text{Ln} x) \Big|_{e^2}^{e^3} = (2-1) + 2(3-2) = 3$$

۷. مقدار $\int_{-1}^3 [x]^{Sgnx} dx$ و $x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۸. مقدار $\int_1^4 [x]^{[x]} dx$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴) ۱۸

۹. مقدار $\int_0^{2\pi} [\sin x] dx$ کدام است؟

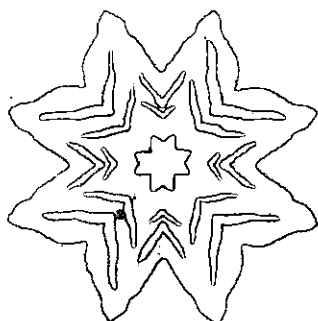
- (۱) -2π (۲) $-\pi$ (۳) π (۴) 2π

۱۰. مقدار $\int_1^4 \ln[x] dx$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) $\ln 3$ (۳) $\ln \frac{2}{3}$ (۴) $\ln 6$

پاسخها:

شماره	پاسخ
۱	۴
۲	۳
۳	۱
۴	۴
۵	۲
۶	۳
۷	۴
۸	۱
۹	۲
۱۰	۴



$$I = \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = \ln \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \ln(e + 1)$$

۱۰. مقدار $\int_{-1}^1 [2x+1] dx$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

حل: گزینه چهارم صحیح است.

$$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (0) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2) dx \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 1$$

۱۱. قسمتی از نمودار تابع $y = [x]$ را که بین دو خط $x=1$ و

$x=3$ قرار دارد، حول محور x' دوران می‌دهیم. حجم

جسم حاصل چه قدر است؟

- (۱) π (۲) 3π (۳) 5π (۴) 7π

حل: گزینه سوم صحیح است.

$$V = \pi \int_1^3 ([x])^2 dx = \pi \int_1^2 dx + \pi \int_2^3 4 dx = 5\pi$$

تمرین

۱. اگر $f(x) = 3x^2 + [x]$ ، آن‌گاه $f'(3)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۲. اگر $f(x) = x^3 - 6x + \left[\frac{5x+1}{v}\right]$ ، آن‌گاه $f'(2)$ کدام

است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳. مقدار $\int_{-1}^3 [x] dx$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۴. مقدار $\int_{-1}^3 [x+1] dx$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۵. مقدار $\int_0^5 [x+2] dx$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۰

۶. مقدار $\int_0^3 [x] \cdot (x^2 + 3) dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{24}$ (۲) $\frac{47}{24}$ (۳) $\frac{55}{24}$ (۴) $\frac{61}{24}$