

توان (نما)

(قسمت اول)

(سال اول نظام جدید و قدیم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$5^4 : 5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

مثال ۲: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $2^4 + 5^2$

۲) $3^3 - 4^2$

۳) $2^3 \times 3^2$

۴) $10^2 \div 5^2$

حل:

$$1) 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 4 = 16, 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$2^4 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

$$2) 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27, 4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$$

$$3) 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8, 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$4) 10^2 = 10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 = 1000, 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$10^2 \div 5^2 = 1000 \div 25 = 40$$

با توجه به تساویهای زیر:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2, \quad 2^2 = 2 \times 2$$

می نویسیم $2^1 = 2$ ، همین طور $3^1 = 3$ و $4^1 = 4$.

پس ۲ به توان ۱ مساوی ۲ و به طور کلی هر عدد حقیقی

مانند: a به توان ۱ برابر a است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^1 = a \quad (2) \quad (\text{تعریف})$$

این تذکر لازم است که هر عدد حقیقی که دارای توان

نباشد، توان آن را یک منظور می کنیم.

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $3^2 + 4^2$

۲) $3^3 + 4^3 + 5^3$

۳) $2^6 - 6^2 + 4^2$

۴) $5^4 - 3^5$

۵) $2^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

۶) $(10^2 \div 5^3) \div 2^2$

برای آسانتر شدن محاسبه، عبارتی مانند: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

را به صورت 2^5 می نویسیم. و آن را می خوانیم «۲ به توان ۵».

به این ترتیب داریم: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ و $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

در عددی مانند 3^4 ، عدد ۳ را پایه و عدد ۴ را توان یا

نمای آن عدد می نامیم همین طور $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ به معنی « $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$ »

است و در عدد $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ، $\frac{2}{5}$ پایه و ۳ توان آن عدد است.

عدد $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ نیز که خوانده می شود «۳/۴ به توان ۲»،

به معنی $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$ است. بنابراین اگر a عدد حقیقی و

n عدد طبیعی فرض شوند، بنا به تعریف داریم:

$$a \times a \times a \times \dots \times a = a^n \quad (1) \quad (\text{تعریف})$$

(عامل n)

در تعریف (۱) عدد حقیقی a را پایه و عدد طبیعی n را

توان (نما) می نامیم.

لازم به یادآوری است که توان دوم یک عدد را مجذور

آن عدد و توان سوم یک عدد را مکعب آن عدد می نامیم.

مثال ۱: اعداد 2^7 ، 10^5 ، $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ ، $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ و 5^4 را

بخوانید. و مفهوم آنها را بنویسید.

حل:

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \text{«۲ به توان ۷»}$$

$$10^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \quad \text{«۱ به توان ۵»}$$

(۱) در ضرب عددهای تواندار اگر پایه‌ها مساوی باشند،

کافی است یک پایه را نوشته، نماها را با هم جمع کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای

طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۱) چنین است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (۱)$$

مثال ۴: با فرض این که a یک عدد حقیقی است.

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد تواندار

بنویسید.

$$۱) a \times a^2 \times a^3 \times a^4$$

$$۲) a^{20} \times a^{14}$$

$$۳) a^{34} \times a^{24}$$

$$۴) a^{100} \times a^{20} \times a^{10} \times a^3 \times a$$

$$۵) a^{1000} \times a^{300} \times a^{70} \times a^4$$

حل:

$$۱) a \times a^2 \times a^3 \times a^4 = a^{1+2+3+4} = a^{10}$$

$$۲) a^{20} \times a^{14} = a^{20+14} = a^{34}$$

$$۳) a^{34} \times a^{24} = a^{58}$$

$$۴) a^{100} \times a^{20} \times a^{10} \times a^3 \times a = a^{100+20+10+3+1} = a^{134}$$

$$۵) a^{1000} \times a^{300} \times a^{70} \times a^4 = a^{1000+300+70+4} = a^{1374}$$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی است و m و

n اعداد طبیعی باشند حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به

شکل یک عدد تواندار بنویسید.

$$۱) a^{r+m+n} \times a^{r+m+n} \times a^n \times a^m \times a^{rn}$$

$$۲) a^{m^2+n^2} \times a^{r mn}$$

$$۳) a^{r m^2} \times a^{r n^2} \times a^{r mn}$$

$$۴) a^1 \times a^2 \times a^3 \times a^4 \times a^{11n-10}$$

$$۵) a^{n^2} \times a^{r n^2} \times a^{r n} \times a^1$$

$$۶) a \times a^2 \times a^3 \times \dots \times a^n$$

$$(۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ : راهنمایی})$$

● ضرب عددهای تواندار با نماهای مساوی

می‌دانیم:

$$2^2 \times 3^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

● ضرب عددهای تواندار با پایه‌های مساوی

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 2^4 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 \end{aligned}$$

پس می‌توان نوشت:

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

همین طور:

$$5^4 \times 5^5 = 5^{4+5} = 5^9$$

$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

$$(3/4)^2 \times (3/4)^4 = (3/4)^{2+4} = (3/4)^6$$

$$7 \times 7^2 \times 7^3 \times 7^4 \times 7^5 = 7^{1+2+3+4+5} = 7^{15}$$

مثال ۳: عبارتهای زیر را به صورت یک عدد تواندار

بنویسید.

$$۱) 2^5 \times 2^4 \times 2^3 \times 2^2 \times 2$$

$$۲) 5^3 \times 5^4 \times 5^5$$

$$۳) (1/2)^2 \times (1/2)^3$$

$$۴) \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{20}$$

$$۵) (0/2)^2 \times (0/2)^3 \times (0/2)^5 \times (0/2)^4$$

$$۶) 10 \times 100 \times 1000 \times 10000 \times 100000 \times 1000000 \times 10000000$$

حل:

$$۱) 2^5 \times 2^4 \times 2^3 \times 2^2 \times 2 = 2^{5+4+3+2+1} = 2^{15}$$

$$۲) 5^3 \times 5^4 \times 5^5 = 5^{3+4+5} = 5^{12}$$

$$۳) (1/2)^2 \times (1/2)^3 = (1/2)^{2+3} = (1/2)^5$$

$$۴) \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{20} =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2+4+5+20} = \left(\frac{2}{5}\right)^{31}$$

$$۵) (0/2)^2 \times (0/2)^3 \times (0/2)^5 \times (0/2)^4 =$$

$$(0/2)^{2+3+5+4} = (0/2)^{14}$$

$$۶) 10 \times 100 \times 1000 \times 10000 \times 100000 \times 1000000 \times 10000000$$

$$= 10 \times 10^2 \times 10^3 \times 10^4 \times 10^5 \times 10^6 =$$

$$10^{1+2+3+4+5+6} = 10^{21}$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

$$۴) a^m \times a^m \times a^n \times a^n \times b^{2n} \times b^{2m}$$

$$= (a^m \times a^m \times a^n \times a^n) \times (b^{2n} \times b^{2m})$$

$$= (a^{m+m+n+n}) \times (b^{2n+2m})$$

$$= a^{2m+2n} \times b^{2m+2n} = (a \times b)^{2m+2n}$$

$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^3 = 6^3$$

پس می توان نوشت:

$$2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$$

همین طور می توان نوشت:

$$1^5 \times 2^5 \times 3^5 = (1 \times 2 \times 3)^5 = 6^5$$

$$3^4 \times 3^4 = (3 \times 3)^4 = 9^4$$

$$2^{30} \times 3^{30} = (2 \times 3)^{30} = 6^{30}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می توان بیان

کرد:

(۲) در ضرب عددهای تواندار، اگر نماها مساوی باشند،

کافی است نمای یکی از عددها را برای حاصلضرب پایه ها قرار

دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی، و a و b عددهای

حقیقی باشند، بیان ریاضی دستور (۲) چنین است:

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad (۲)$$

مثال ۵: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و

n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به

شکل یک عدد تواندار بنویسید.

$$۱) a^5 \times b^6 \times a^4 \times b^3$$

$$۲) a^m \times a^n \times b^{n+m}$$

$$۳) a^m \times b^n \times a^n \times b^m$$

$$۴) a^m \times a^m \times a^n \times a^n \times b^{2n} \times b^{2m}$$

$$۵) a^{40} \times b^{20} \times a^{20} \times b^{25} \times b^{15}$$

$$۶) a^{70} \times b^4 \times a^4 \times b^{70}$$

حل:

$$۱) a^5 \times b^6 \times a^4 \times b^3 = (a^5 \times a^4) \times (b^6 \times b^3)$$

$$= (a^{5+4}) \times (b^{6+3})$$

$$= a^9 \times b^9 = (a \times b)^9$$

$$۲) a^m \times a^n \times b^{n+m} = (a^m \times a^n) \times b^{m+n}$$

$$= a^{m+n} \times b^{m+n} = (a \times b)^{m+n}$$

$$۳) a^m \times b^n \times a^n \times b^m = (a^m \times a^n) \times (b^n \times b^m)$$

$$= a^{m+n} \times b^{n+m}$$

$$= (a^{m+n}) \times (b^{m+n}) = (a \times b)^{m+n}$$

$$۵) a^{40} \times b^{20} \times a^{20} \times b^{25} \times b^{15}$$

$$= (a^{40} \times a^{20}) \times (b^{20} \times b^{25} \times b^{15})$$

$$= (a^{40+20}) \times (b^{20+25+15})$$

$$= a^{60} \times b^{60} = (a \times b)^{60}$$

$$۶) a^{70} \times b^4 \times a^4 \times b^{70} = (a^{70} \times a^4) \times (b^{70} \times b^4)$$

$$= (a^{70+4}) \times (b^{70+4})$$

$$= a^{74} \times b^{74} = (a \times b)^{74}$$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و

n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به

شکل یک عدد تواندار بنویسید.

$$۱) a^{30} \times b^4 \times a^4 \times b^{31} \times b \times a^4$$

$$۲) a^{m+n} \times b^m \times b^n \times a^{m+n} \times b^{m+n}$$

$$۳) a^m \times a^n \times b^m \times b^n \times (a \times b)^{m+n}$$

$$۴) a \times b \times a^4 \times b^4 \times a^4 \times b^4 \times a^4 \times b^4$$

● تقسیم عددهای تواندار با پایه های مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$2^6 \div 2^4 = \frac{2^6}{2^4} =$$

$$\frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2^2 = 4$$

این تقسیم را می توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$2^6 \div 2^4 = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

همچنین:

$$5^5 \div 5^2 = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5 \times 5}{\cancel{5} \times \cancel{5}} = 5^3$$

و به طور مختصر می توان نوشت:

$$5^5 \div 5^2 = 5^{5-2} = 5^3$$

مثال ۶: حاصل تقسیمهای زیر را پیدا کنید.

$$۱) 5^{20} \div 5^{18}$$

$$۲) 2^{12} \div 2^7$$

$$۳) 7^{45} \div 7^{44}$$

$$۴) 3^{124} \div 3^{122}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a^{37} \times a^7 \times a^7 \times a) \times (b^{40} \times b^5 \times b^{34})}{(a^7 \times a^5 \times a^7) \times (b^{30} \times b^{15})} \\
 &= \frac{a^{37+7+7+1} \times b^{40+5+34}}{a^{7+5+7} \times b^{30+15}} \\
 &= \frac{a^{50} \times b^{79}}{a^{19} \times b^{45}} = \frac{a^{50}}{a^{19}} \times \frac{b^{79}}{b^{45}} = a^{50-19} \times b^{79-45} \\
 &= a^{31} \times b^{34} = (a \times b)^{34}
 \end{aligned}$$

$$۴) \frac{a^{122} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}} = \frac{a^{122-72}}{a^{37-17}} = \frac{a^{50}}{a^{20}} = a^{50-20} = a^{30}$$

$$۵) \frac{a^{56} + a^{78}}{a^7 + a^7} = \frac{a^{56}(1 + a^{22})}{a^7(a^7 + 1)} =$$

$$\frac{a^{56}}{a^7} \times \frac{a^7 + 1}{a^7 + 1} = a^{56-7} \times 1 = a^{49}$$

$$۶) \frac{a \times a^7 \times a^7 \times b \times b^7 \times b^7}{(a \times b)^8} =$$

$$\frac{a^{1+7+7} \times b^{1+7+7}}{(a \times b)^8} = \frac{a^6 \times b^6}{(a \times b)^8} =$$

$$\frac{(a \times b)^6}{(a \times b)^8} = (a \times b)^{6-8} = (a \times b)^{-2}$$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$۱) \frac{(a^5 \div a^5) \times (b^5 \div b^3)}{(b^{36} \div b^{32}) \times (a^{12} \div a^8)} \times \frac{a^{10} \div a^7}{b^7 \div b} \times \frac{b^{20} \div b^{12}}{a^6 \div a^4}$$

$$۲) \frac{a^{123} \div a^{23}}{b^{152} \div b^{102}} \times \frac{b^{120} \div b^{70}}{a^5 \div a^7}$$

$$۳) \frac{a^{82} + a^{78}}{a^8 + a^7} \times \frac{b^{78} + b^{82}}{b^8 + b^7}$$

$$۴) \frac{a^{1378} \div a^7}{a^{50} \div a^{48}}$$

● تقسیم عددهای تواندار با نماهای مساوی
به تقسیم زیر توجه کنید:

$$6^4 \div 2^4 = \frac{6^4}{2^4} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2 \times 2} =$$

حل:

$$۱) 5^{20} \div 5^{18} = 5^{20-18} = 5^2 = 25$$

$$۲) 2^{12} \div 2^7 = 2^{12-7} = 2^5 = 32$$

$$۳) 7^{25} \div 7^{44} = 7^{25-44} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$۴) 3^{124} \div 3^{122} = 3^{124-122} = 3^2 = 9$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می توان بیان کرد:
(۳) برای تقسیم دو عدد توانی با پایه های مساوی، کافی است یک پایه را بنویسیم و نمای مقسوم علیه را از نمای مقسوم کم کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۳) چنین است:

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (۳)$$

مثال ۷: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$۱) a^5 \div a^7$$

$$۲) \frac{a^5 \times b^5}{b^7 \times a^4}$$

$$۳) \frac{a^{37} \times b^{40} \times a^7 \times b^5 \times a^7 \times a \times b^{34}}{a^7 \times b^{30} \times b^{15} \times a^5 \times a^7}$$

$$۴) \frac{a^{122} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}}$$

$$۵) \frac{a^{56} + a^{78}}{a^7 + a^7}$$

$$۶) \frac{a \times a^7 \times a^7 \times b \times b^7 \times b^7}{(a \times b)^8}$$

حل:

$$۱) a^5 \div a^7 = a^{5-7} = a^{-2}$$

$$۲) \frac{a^5 \times b^5}{b^7 \times a^4} = \frac{a^5}{a^4} \times \frac{b^5}{b^7} = a^{5-4} \times b^{5-7} = a^1 \times b^{-2} = a \times \frac{1}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

$$۳) \frac{a^{37} \times b^{40} \times a^7 \times b^5 \times a^7 \times a \times b^{34}}{a^7 \times b^{30} \times b^{15} \times a^5 \times a^7}$$

$$= \frac{\cancel{a^r} \times a^r \times \cancel{b^s}}{\cancel{b^r} \times b^r \times \cancel{a^s}} = \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$۴) \frac{a^5 \times a^2}{b^{12} \div b^5} = \frac{a^{5+2}}{b^{12-5}} = \frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

- ۱) $\frac{a^5 \times b^2 \times a^2 \times b^4}{b^5 \times a^2 \times b^2 \times a^4}$
- ۲) $\frac{a^m \times b^n \times b^m \times a^n}{b^m \times a^n \times a^m \times b^n}$
- ۳) $\frac{a^m \times a^m}{b^m \times b^m}$
- ۴) $\frac{a \times a^2 \times a^3 \times a^4 \times a^5}{b \times b^2 \times b^3 \times b^4 \times b^5}$
- ۵) $\frac{a^m \times a^n}{b^n \times b^m}$
- ۶) $\frac{a \times a^2 \times \dots \times a^n}{b \times b^2 \times \dots \times b^n}$

● توان صفر

به مثال زیر توجه کنید:

$$۸ \div ۸ = ۱ \quad (۱)$$

از طرفی دیگر با توجه به دستور تقسیم توانی با پایه‌های

مساوی می‌توان نوشت:

$$۸ \div ۸ = ۲^3 \div ۲^3 = ۲^{3-3} = ۲^0 \quad (۲)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$۱ = ۲^0$$

همچنین:

$$۵^0 = ۱, \left(\frac{2}{3}\right)^0 = ۱, (3/4)^0 = ۱,$$

$$(-۱۰۰۰)^0 = ۱, (۰/۰۰۰۱)^0 = ۱$$

و به طور کلی هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a به توان صفر، برابر ۱ است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad (\text{تعریف})$$

$$= \frac{\cancel{2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3}}{\cancel{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}} = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

این تقسیم را می‌توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$۶^۴ \div ۲^۴ = \frac{۶^۴}{۲^۴} = \left(\frac{۶}{۲}\right)^۴ = ۳^۴$$

همچنین:

$$۹^۶ \div ۳^۶ = \frac{۹^۶}{۳^۶} = \left(\frac{۹}{۳}\right)^۶ = ۳^۶$$

$$۱۵^۷ \div ۵^۷ = \frac{۱۵^۷}{۵^۷} = \left(\frac{۱۵}{۵}\right)^۷ = ۳^۷$$

$$۳۲^۵ \div ۸^۵ = \frac{۳۲^۵}{۸^۵} = \left(\frac{۳۲}{۸}\right)^۵ = ۴^۵$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

(۴) برای تقسیم دو عدد توانی که دارای نمای مساویند، کافی است نمای یکی از دو عدد را برای حاصل تقسیم پایه‌ها قرار دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی و

b عدد حقیقی مخالف صفر باشند، بیان ریاضی دستور (۴)

چنین است:

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (۴)$$

مثال ۸: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف

صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی تواندار

بنویسید.

$$۱) a^۷ \div (a^2 \times b^5)$$

$$۲) \frac{a^۷ \div a^۴}{b^5 \div b^2}$$

$$۳) \frac{a^۴ \times b^۴ \times a^2 \times b}{b^۷ \times a^2 \times b^2 \times a}$$

$$۴) \frac{a^5 \times a^2}{b^{12} \div b^5}$$

حل:

$$۱) a^۷ \div (a^2 \times b^5) = \frac{a^۷}{a^2 \times b^5} = \frac{\cancel{a^2} \times a^5}{\cancel{a^2} \times b^5} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

$$۲) \frac{a^۷ \div a^۴}{b^5 \div b^2} = \frac{a^{۷-۴}}{b^{5-2}} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$۳) \frac{a^۴ \times b^۴ \times a^2 \times b}{b^۷ \times a^2 \times b^2 \times a} = \frac{a^۴ \times a^2 \times (b^4 \times b)}{b^۷ \times b^2 \times (a^2 \times a)}$$

حل: با استفاده از دستور (۵) داریم:

$$۱) (a^r)^f \times (b^f)^r = a^{r \times f} \times b^{f \times r}$$

$$= a^{12} \times b^{12} = (a \times b)^{12}$$

$$۲) (a^r)^r \times (a^r)^f \times (b^r)^r \times (b^f)^r$$

$$= a^{r \times r} \times a^{r \times f} \times b^{r \times r} \times b^{f \times r} = a^6 \times a^{12} \times b^6 \times b^{12}$$

$$= a^{6+12} \times b^{6+12} = a^{18} \times b^{18} = (a \times b)^{18}$$

● توان منفی

به مثال زیر توجه کنید:

$$۲^۵ \div ۲^۷ = ۲^{۵-۷} = ۲^{-۲}$$

(۱)

عدد $۲^{-۲}$ طبق تعریفی که برای توانهای طبیعی کردیم،

معنی ندارد. از طرف دیگر می دانیم که:

$$۲^۵ \div ۲^۷ = \frac{۲^۵}{۲^۷} = \frac{۲^۵}{۲^۵ \times ۲^۲} = \frac{1}{۲^۲} \quad (۲)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$۲^{-۲} = \frac{1}{۲^۲}$$

همچنین:

$$۳^{-۵} = \frac{1}{۳^۵}, \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲} = \frac{1}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲,$$

$$(۲/۵)^{-۷} = \frac{1}{(۲/۵)^۷}, (۲^{-۵})^۲ = ۲^{-۲۰} = \frac{1}{۲^{۲۰}},$$

$$\left((۵^{-۲})^{-۳}\right)^{-۵} = (۵^۶)^{-۵} = ۵^{-۳۰} = \frac{1}{۵^{۳۰}}$$

به طور کلی برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a و

هر عدد طبیعی n، بنا به تعریف:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

توجه داشته باشید که ax^{-n} با $(ax)^{-n}$ فرق دارد.

مثال ۱۰: عبارتهای زیر را ساده کنید. و هر یک را با

توان مثبت نشان دهید.

$$۱) \frac{۵^{-۳}}{۵^{-۲}}$$

$$۲) \frac{۵^{-۱۵} \times ۵^۴}{۵^{-۳} \times ۵^{-۴}}$$

$$۳) \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲} \times \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲$$

لازم به ذکر است که صفر به توان صفر ($۰^۰$) بی معنی

است. (در آینده در مبحث حد نشان داده می شود که $۰^۰$ یکی از صورتهای مبهم است.)

● توان رساندن یک عدد تواندار

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$(۳^۴)^۳ = (۳^۴) \times (۳^۴) \times (۳^۴) = ۳^{۴+۴+۴} = ۳^{۱۲} = ۳^{(۴ \times ۳)}$$

$$(۲^۵)^۴ = (۲^۵) \times (۲^۵) \times (۲^۵) \times (۲^۵) =$$

$$۲^{۵+۵+۵+۵} = ۲^{۲۰} = ۲^{(۵ \times ۴)}$$

$$(۵^۳)^۲ = (۵^۳) \times (۵^۳) = ۵^{۳+۳} = ۵^۶ = ۵^{(۳ \times ۲)}$$

$$(۷^۵)^۳ = (۷^۵) \times (۷^۵) \times (۷^۵) = ۷^{۵+۵+۵} = ۷^{۱۵} = ۷^{(۵ \times ۳)}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می توان بیان

کرد:

(۵) برای به توان رساندن یک عدد تواندار کافی است پایه

را بنویسیم و توانها را در هم ضرب کنیم. به طور کلی اگر a

یک عدد حقیقی و m و n عددهای صحیح باشند، بیان ریاضی

دستور (۵) چنین است:

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad (۵)$$

توجه داشته باشیم که $(a^m)^n$ با a^{m^n} فرق دارد. برای

مثال $۲^{۲^۳} = ۲^۸$ و $(۲^۲)^۳ = ۲^۶$.

همچنین به مثال زیر توجه کنید:

$$(۲^۳ \times ۳^۲)^۲ = (۲^۳ \times ۳^۲) \times (۲^۳ \times ۳^۲) \times (۲^۳ \times ۳^۲)$$

$$= (۲^۳ \times ۲^۳ \times ۲^۳) \times (۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳^۲)$$

$$= ۲^{۳+۳+۳} \times ۳^{۲+۲+۲} = ۲^۹ \times ۳^۶$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(۲^۳ \times ۳^۲)^۲ = ۲^۹ \times ۳^۶$$

بنابراین در حالت کلی اگر a و b عددهای حقیقی و

k, m و n عددهای صحیح باشند، داریم:

$$(a^k \times b^m)^n = a^{k \times n} \times b^{m \times n}$$

مثال ۹: با فرض این که a و b عددهای حقیقی باشند،

حاصل هر عبارت را به صورت عددی تواندار بنویسید.

$$۱) (a^r)^f \times (b^f)^r$$

$$۲) (a^r)^r \times (a^r)^f \times (b^r)^r \times (b^f)^r$$

$$a^{-mn} \times a^{nm} = a^{-mn+nm} = a^0 = 1$$

$$۲) x^n \div x^{n+1} = x^{n-(n+1)} = x^{n-n-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$۳) ۲ \times a^{-۵} \times (۲ \times a)^۵ \times (۲ \times a)^{-۲} =$$

$$۲ \times a^{-۵} \times ۲^۵ \times a^۵ \times ۲^{-۲} \times a^{-۲}$$

$$= (۲ \times ۲^۵ \times ۲^{-۲}) \times (a^{-۵} \times a^۵ \times a^{-۲})$$

$$= (۲^{1+۵-۲}) \times (a^{-۵+۵-۲}) = ۲^۴ \times a^{-۲} = \frac{۲^۴}{a^۲} = \left(\frac{۲}{a}\right)^۴$$

$$۴) \frac{x^{-۲} \times x^{-۲} \times x^{-۲} \times x^۵}{x^۵ \div (x^{-۲})^{-۲}} = \frac{x^{-۲-۲-۲+۵}}{x^۵ \div x^۴} = \frac{x^{-۱}}{x^{۵-۴}} =$$

$$\frac{x^{-۱}}{x^۱} = x^{-۱-۱} = x^{-۲} = \frac{1}{x^۲}$$

$$۵) \frac{a^{m+n} \div a^{m-n}}{a^{n-1}} = \frac{a^{m+n-(m-n)}}{a^{n-1}} =$$

$$\frac{a^{m+n-m+n}}{a^{n-1}} = \frac{a^{2n}}{a^{n-1}} = a^{2n-(n-1)} = a^{2n-n+1} = a^1 = a$$

$$۶) \frac{a^۲ \times a^{-۲}}{a^۴ \times a^{-۵}} = \frac{a^{۲-۲}}{a^{۴-۵}} = \frac{a^0}{a^{-1}} = a^{0-(-1)} = a^{0+1} = a^1 = a$$

$$۷) \frac{x^{-۶} \times (x^{-۲})^{-۲}}{x^۷ \times x^{-۵}} = \frac{x^{-۶} \times x^۴}{x^۷ \times x^{-۵}} =$$

$$\frac{x^{-۶+۴}}{x^{۷-۵}} = \frac{x^{-۲}}{x^۲} = x^{-۲-۲} = x^{-۴} = \frac{1}{x^۴} = \left(\frac{1}{x}\right)^۴$$

$$۸) \frac{x^{-۵} \div x^{-۲}}{x^۵ \div x^{-۷}} = \frac{x^{-۵-(-۲)}}{x^{۵-(-۷)}} = \frac{x^{-۵+۲}}{x^{۵+۷}} =$$

$$\frac{x^{-۳}}{x^{۱۲}} = x^{-۳-۱۲} = x^{-۱۵} = \frac{1}{x^{۱۵}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{۱۵}$$

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و

m و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱) \frac{(a^{-m})^{-m} \times (a^{-n})^{-n} \times (a^m)^{2n}}{(b^{-m})^{-m} \times (b^{-n})^{-n} \times (b^{2n})^m}$$

(جواب: $\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+n)^2}$)

$$۲) \left(\frac{۲^۲ \times ۳^۲ \times a^{-۵} \times b^{-۴} \times c^{-۲}}{۲a^{-۲} \times ۴b^{-۲} \times ۹c^{-۱} \times ۳} \right)^{-۲}$$

(جواب: $(abc)^۶$)

$$۴) ((۳^{-۲})^۲)^۲ \times (۳^۵)^{-۲}$$

حل:

$$۱) \frac{۵^{-۲}}{۵^{-۲}} = ۵^{-۲-(-۲)} = ۵^{-۲+۲} = ۵^0 = 1$$

$$۲) \frac{۵^{-۱۵} \times ۵^۴}{۵^{-۲} \times ۵^{-۴}} = \frac{۵^{-۱۵+۴}}{۵^{-۲+(-۴)}} =$$

$$= \frac{۵^{-۱۱}}{۵^{-۶}} = ۵^{-۱۱-(-۶)} = ۵^{-۱۱+۶} = ۵^{-۵} = \frac{1}{۵^۵} = \left(\frac{1}{۵}\right)^۵$$

$$۳) \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲} \times \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲+۲}$$

$$= \left(\frac{۲}{۳}\right)^0 = 1 = \frac{۳}{۳}$$

$$۴) ((۳^{-۲})^۲)^۲ \times (۳^۵)^{-۲}$$

$$= (۳^{-۶})^۲ \times ۳^{-۱۰} = ۳^{-۱۲} \times ۳^{-۱۰}$$

$$= ۳^{-۱۲-۱۰} = ۳^{-۲۲} = \frac{1}{۳^{۲۲}} = \left(\frac{1}{۳}\right)^{۲۲}$$

مثال ۱۱: اگر a و x اعداد حقیقی مخالف صفر و m

و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱) (a^{-m})^n \times (a^{-n})^{-m}$$

$$۲) x^n \div x^{n+1}$$

$$۳) ۲ \times a^{-۵} \times (۲ \times a)^۵ \times (۲ \times a)^{-۲}$$

$$۴) \frac{x^{-۲} \times x^{-۲} \times x^{-۲} \times x^۵}{x^۵ \div (x^{-۲})^{-۲}}$$

$$۵) \frac{a^{m+n} \div a^{m-n}}{a^{n-1}}$$

$$۶) \frac{a^۲ \times a^{-۲}}{a^۴ \times a^{-۵}}$$

$$۷) \frac{x^{-۶} \times (x^{-۲})^{-۲}}{x^۷ \times x^{-۵}}$$

$$۸) \frac{x^{-۵} \div x^{-۲}}{x^۵ \div x^{-۷}}$$

حل:

$$۱) (a^{-m})^n \times (a^{-n})^{-m} = a^{(-m) \times n} \times a^{(-n) \times (-m)} =$$