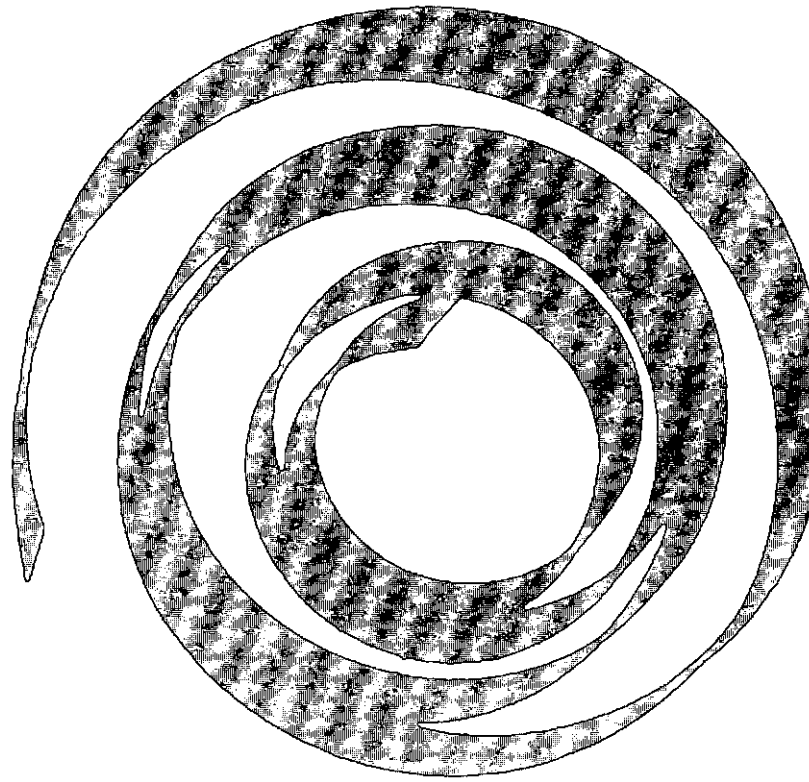


توابع مولد



● سید محمدرضا میرفتاح

دانش آموز دبیرستان سروش

ترجمه از کتاب، رالف - پ - گریمالدی

مثال ۲: الف) برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$$

پس:

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \dots$$

لذا تابع $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ تابع مولد رشته زیر است:

$$1, 1, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots$$

به طوری که $n+1$ جمله اول یک، و بقیه صفر هستند.

(ب) برای $|x| < 1$ و وقتی که n به سمت بینهایت میل می کند،

اتحاد قسمت الف به شکل زیر درخواهد آمد:

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

یا

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

در نتیجه $\frac{1}{1 - x}$ تابع مولد رشته $1, 1, 1, \dots$ است.

(ج) با گرفتن مشتق از طرفین رابطه «ب» خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - x} \right) = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

تعاریف و امثله (روشهای محاسباتی)

در این بخش ما تعدادی از فرمولها و مثالهایی را که در

ارتباط با رشته های توانی هستند، بررسی می کنیم. این فرمولها

برای به دست آوردن ضریب جمله های خاصی در یک تابع مولد

مورد استفاده قرار خواهند گرفت. با تعریف زیر آغاز می کنیم:

تعریف ۱: رشته ای از اعداد حقیقی است

$(a_i \in \mathbb{R})$ تابع

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

تابع مولد برای رشته داده شده نامیده می شود.

مثال ۱: برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$f(x) = (1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots$$

$$+ \binom{n}{n}x^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \dots$$

با توجه به تعریف فوق تابع $(1 + x)^n$ ، تابع مولد رشته زیر

است:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \dots$$

صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1) + x(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^2}$$

واضح است که حل مسأله فوق به حدس ما در جمله عمومی رشته برمی‌گردد و اگر نتوانیم حدس بزنیم، امکان پاسخگویی به پرسش وجود ندارد. البته در مواردی که بین جمله‌های رشته یک رابطه بازگشتی^۱ برقرار باشد، روشهایی برای به دست آوردن جمله عمومی آن وجود دارد که منوط به مطالعه بحث روابط بازگشتی است.

با توجه به بسط دوجمله‌ای خیام برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

ما با دو مثال، رابطه فوق را برای n های منفی و n های غیرصحیح توسعه می‌دهیم. قبل از پرداختن به مثالها باید در تعریف ترکیب تغییراتی ایجاد کنیم. به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف ۲:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r [n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)]}{r!}$$

$$= (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

در حقیقت با تعریف فوق تعریف ترکیب را برای n های منفی توسعه داده‌ایم.

تذکر: برای n های غیرصحیح $\binom{n}{r}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad \binom{n}{r} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

حال آماده‌ایم که مثالهای زیر را مورد بررسی قرار دهیم.

یا

$$\frac{+1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

در نتیجه $\frac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولد رشته ۱، ۲، ۳، ۴، ... است، در حالی که $\frac{x}{(1-x)^2}$ تابع مولد رشته ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... است.

(د) با ادامه مطالب بخش «ج» خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{d}{dx} (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$$

یا

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots$$

در نتیجه $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ رشته ۱، ۲، ۳، ۴، ... و $\frac{x}{(1-x)^3}$ رشته ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... را تولید می‌کند.

مثال ۳: الف) از بخش «ب» مثال ۲ می‌دانیم که تابع مولد

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

رشته تمام یک است.

$$g(x) = f(x) - x^2 = \frac{1}{1-x} - x^2$$

تابع مولد رشته ۱، ۱، ۱، ۰، ۱، ۱، ۰، ... است، در حالی که تابع:

$$h(x) = f(x) + 2x^2 = \frac{1}{1-x} + 2x^2$$

رشته ۱، ۱، ۱، ۳، ۱، ۱، ۱، ... را تولید می‌کند.

(ب) آیا می‌توان به کمک جواب مثال ۲ برای به دست آوردن

تابع مولد رشته ۰، ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، ... اقدام کرد؟

پاسخ به این پرسش آسان است. مشاهده می‌کنیم که:

$$a_0 = 0 = 0^2 + 0$$

$$a_1 = 2 = 1^2 + 1$$

$$a_2 = 6 = 2^2 + 2$$

$$a_3 = 12 = 3^2 + 3$$

$$a_4 = 20 = 4^2 + 4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

در حالت کلی داریم $a_n = n^2 + n$ (با استفاده از

جوابهای بخشهای «ج» و «د» مثال ۲ تابع مولد رشته فوق به

$$۱) (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

$$۲) (1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \dots + \binom{n}{n}a^nx^n$$

$$۳) (1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \dots + \binom{n}{n}x^{nm}$$

$$۴) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n$$

$$۵) \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \quad |x| < 1$$

$$۶) \frac{1}{(1+x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} x^i$$

$$۷) \frac{1}{(1-x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ و $h(x) = f(x)g(x)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

به طوری که:

$$\forall k \geq 0; c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

مثال ۶: ضریب x^{15} را در $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$ تعیین کنید.

از آنجا که داریم:

$$x^2 + x^3 + x^4 + \dots = x^2(1+x+x^2+\dots)$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$$

مثال ۴: برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ بسط سری ماکلورن^۱ برای

$(1+x)^{-n}$ به صورت زیر است:

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!}$$

$$+ (-n)(-n-1)(-n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!} x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$$

رابطه فوق تعمیم بسط دوجمله‌ای خیام است که بیانگر تابع

مولد رشته $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \dots$ است.

مثال ۵: برای هر $n \in \mathbb{R}$ سری ماکلورن برای $(1+x)^n$

عبارت است از:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} x^r$$

به عنوان مثال:

$$(1+3x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{3r+2}{2})}{r!} (3x)^r$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-3r+2)}{r!} x^r$$

$$\frac{(-1)(-3)}{2!}, (-1), 1 \quad \text{و} \quad (1+3x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{تابع مولد رشته}$$

$$\frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-3r+2)}{r!}, \dots, \frac{(-1)(-3)(-5)}{3!},$$

است.

پیش از ادامه مطالبی را که تاکنون بررسی کرده‌ایم، در جدول

زیر برای مرورهای آینده جمع‌آوری می‌کنیم.

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}$$

۴ سرباز تقسیم کند، به طوری که هر کس حداقل ۳ و حداکثر ۸ اسلحه دریافت کند؟

با توجه به مثال ۷ تعداد انتخابها برای هر سرباز توسط سری هندسی $x^3 + x^4 + \dots + x^8$ معین می گردد. چون ۴ سرباز وجود دارد، تابع مولد، $f(x) = (x^3 + x^4 + \dots + x^8)^4$ است. کافی است ضریب جمله x^{24} را در $f(x)$ تعیین کنیم. جواب مسأله فوق همین عدد خواهد بود. برای این کار چنین عمل می کنیم:

$$f(x) = x^{12}(1+x+x^2+\dots+x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

اگر ضریب x^{12} را در تابع $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$ جستجو کنیم، گویی ضریب x^{24} را در $f(x)$ یافته ایم.

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \dots + x^{24}\right]$$

$$\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \dots\right]$$

ضریب x^{12} به ترتیب زیر به دست می آید:

$$\left[(-1)^{12}\binom{-4}{12} - (-1)^6\binom{4}{1}\binom{-4}{6} + \binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]$$

$$= \left[\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2}\right] = 125$$

مثال ۹: اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

از آنجا که داریم:

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^n\right]^2$$

با مقایسه ضرایب جمله های x^n در دو طرف تساوی فوق به اتحاد بالا دست می یابیم. ضریب جمله x^n در سمت چپ تساوی $\binom{2n}{n}$ است. برای به دست آوردن ضریب x^n در سمت راست تساوی فوق، سمت راست را بسط می دهیم:

$$\left[(1+x)^n\right]^2 = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n\right]^2$$

ضریب x^{15} در $f(x)$ ، ضریب x^{15} در $\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4}$ ضریب x^{15} در $f(x)$ خواهد بود. در نتیجه ضریب مورد جستجو ضریب x^7 در تابع $\frac{1}{(1-x)^4}$ است که عبارت است از:

$$(-1)^7\binom{-4}{7} = (-1)^7(-1)^7\binom{4+7-1}{7-1} = \binom{10}{6} = 120$$

در حالت کلی برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ اگر $0 \leq n \leq 7$ باشد، در آن صورت ضریب x^n در $f(x)$ برابر صفر است. برای $n \geq 8$ ضریب x^n در $f(x)$ ، ضریب x^{n-8} در تابع $\frac{1}{(1-x)^4}$ است که آن برابر است با:

$$(-1)^{n-8}\binom{-4}{n-8} = (-1)^{n-8}(-1)^{n-8}\binom{4+n-8-1}{n-8-1} = \binom{n-5}{n-8}$$

مثال ۷: به چند طریق می توان r شیء را از n شیء مجزا انتخاب کرد، اگر جابجایی مهم نباشد و تکرار مجاز باشد؟ (این مسأله در حقیقت ترکیب با تکرار است که در آنالیز ترکیبی مورد بحث قرار گرفته است.) ما در اینجا تلاش می کنیم این مسأله را با استفاده از معلومات خود در مورد تابع مولد حل کنیم.

برای هریک از n شیء مجزا سری هندسی $1+x+x^2+\dots$ را در نظر می گیریم. توان هر جمله بیانگر تعداد انتخاب آن شیء است که مثلاً می تواند صفر، یک، دو و ... باشد.

با در نظر گرفتن همه n شیء، تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)^n$$

که در حقیقت حاصلضرب n تا سری هندسی فوق است. حال ضریب جمله x^r در تابع فوق بیانگر تعداد حالت هایی است که از میان n شیء مجزا می توان r شیء را انتخاب کرد. حال کافی است که به جای سری هندسی، تابع مولد آن را قرار دهیم. داریم:

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

که ضریب x^r ، $\binom{n+r-1}{r}$ خواهد شد.

مثال ۸: یک پلیس به چند طریق می تواند ۲۴ اسلحه را میان

با توجه به بسط فوق ضریب x^n به صورت زیر محاسبه

یا می‌شود:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

و با توجه به تساوی اثبات شده در آنالیز ترکیبی

مجموع فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

حکم اثبات شد.

مثال ۱۰: ضریب x^1 را در $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$ به دست

آورید.

از آنجا که برای هر a مخالف صفر داریم:

$$\frac{1}{x-a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a} \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots \right]$$

پس برای حل مسئله می‌بایست ضریب x^1 را در رابطه زیر جستجو کرد:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots \right] \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \dots\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1} \left(-\frac{x}{2}\right) \right]$$

$$+ \binom{-2}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \dots$$

روش دیگری که برای حل مسئله وجود دارد استفاده از

روش «تجزیه به کسره‌های جزئی» است.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

با متحد قراردادن طرفین خواهیم داشت:

$$1 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-3)$$

از مقایسه ضرایب به دست می‌آید که:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A-5B+C=0 \\ 4A+6B-3C=1 \end{cases}$$

و از حل دستگاه سه معادله سه مجهول فوق، به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-1$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i$$

$$+ \left(-\frac{1}{4}\right) \left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1} \left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{-2}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

ضریب x^1 بدین ترتیب است:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \binom{-2}{1} \left(-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]$$

