

تفاضل مربع‌های دو عدد

یک الگوی ریاضی

با سلام خدمت دست‌اندرکاران مجله‌ی ریاضی برهان، اینجانب
فرهاد محمدی خجسته‌نژاد دانش‌آموز سال اول دبیرستان خاتم
منطقه‌ی ۶ تهران، الگوی زیر را درباره‌ی عددهای طبیعی a و b
($a > b$) کشف کرده و با کمک دبیر ریاضی خود درستی آن را اثبات
نموده‌ام تا در صورتی که صلاح می‌دانید آن را در مجله‌تان مطرح
نمایید. برای محاسبه‌ی تفاضل مربع‌های دو عدد a و b یعنی $a^2 - b^2$ ،
می‌توان دو عدد a و b را با دو برابرهای عددهای طبیعی بین a و b
جمع کرد، برای مثال:

$$7^2 - 3^2 = 7 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 6 + 3;$$

$$8^2 - 5^2 = 8 + 2 \times 6 + 2 \times 7 + 5$$

یعنی در حالت کلی داریم:

$$a^2 - b^2 = a + 2(a-1) + 2(a-2) + \dots + 2(b+1) + b$$

برای اثبات این دستور از سمت راست ساده می‌کنیم و از دستور

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{سمت راست} = (a+b) + 2(a-1+a-2+\dots+b+1)$$

$$= (a+b) + 2[(1+2+3+\dots+b+b+1+\dots+a-1) - (1+2+\dots+b)]$$

$$= (a+b) + 2\left[\frac{a(a-1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2}\right] = a+b + (a^2 - a - b^2 - b)$$

$$= a^2 - b^2$$