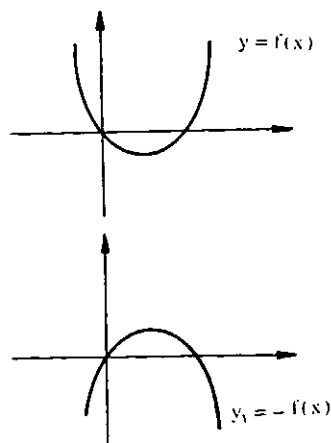


تغییرات و انتقال منحنی‌ها

● احمد قندهاری



۲- رسم تابع به معادله $y_1 = f(-x)$

اگر نقطه $M|_{y_1}^{x_1}$ روی منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'|_{y_1}^{-x_1}$ روی منحنی تابع به معادله $y_1 = f(-x)$ است و بالعکس:

$$\text{اگر } M'|_{y_1}^{-x_1} \in y_1 \Rightarrow y_1 = f(-(-x_1)) \Rightarrow y_1 = f(x_1) \Rightarrow$$

$$M|_{y_1}^{x_1} \in f$$

چون نقطه $M|_{y_1}^{x_1}$ و $M'|_{y_1}^{-x_1}$ قرینه یکدیگر نسبت به محور y می‌باشند، در نتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = f(-x)$ باید قرینه نمودار تابع f به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور y رسم کنیم. در شکل‌های بعد نمودارها دو تابع به معادلات $y = f(x)$ و $y_1 = f(-x)$ رسم شده است.

تابع f به معادله $y = f(x)$ مفروض است.

می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های به معادلات $y_1 = -f(x)$

و $y_2 = f(-x)$ و $y_3 = f(|x|)$ و $y_4 = |f(x)|$ و $y_5 = f(x-a)$ و $y_6 = b + f(x)$ و $y_7 = f(kx)$ و $y_8 = b + f(x-a)$ و $y_9 = kf(x)$ را رسم کنیم.

همچنین اگر منحنی‌های دو تابع f و g معلوم باشد، می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های $f+g$ و $f-g$ را رسم کنیم.

۱- رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$

اگر نقطه $M|_{y_1}^{x_1}$ نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'|_{y_1}^{-x_1}$ نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ است.

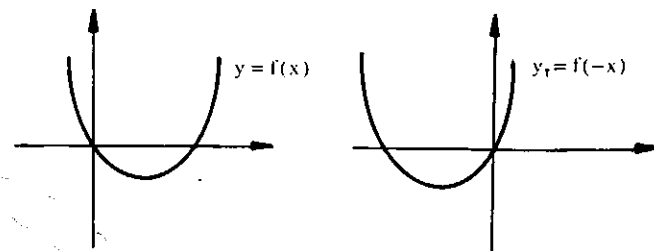
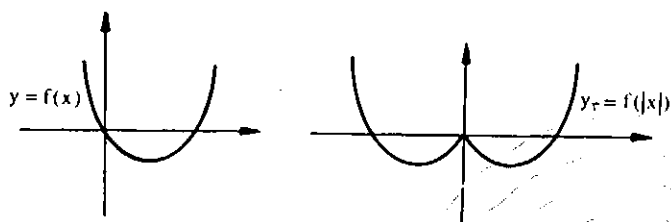
و بالعکس:

$$\text{اگر } M' \in y_1 \Rightarrow -y_1 = -f(x_1) \Rightarrow y_1 = f(x_1) \Rightarrow M|_{y_1}^{x_1} \in f$$

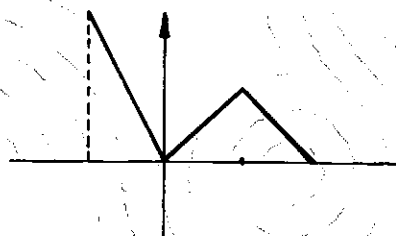
چون دو نقطه $M|_{y_1}^{x_1}$ و $M'|_{y_1}^{-x_1}$ قرینه یکدیگر نسبت به محور x می‌باشند.

در نتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ باید قرینه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم. در شکل‌های زیر نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده است.

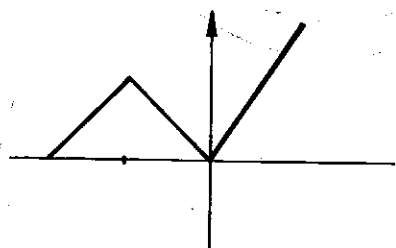
بنابراین نمودار تابع به معادله $y_F = f(|x|)$ چنین خواهد شد.



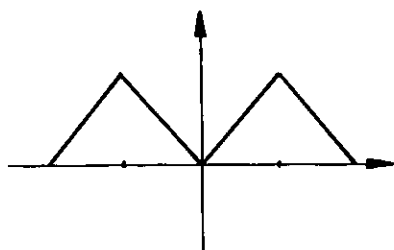
مثال: اگر نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ به صورت زیر باشد



آنگاه نمودار تابع به معادله $y_F = f(-x)$ چنین است:



و نمودار تابع به معادله $y_F = f(|x|)$ چنین است.

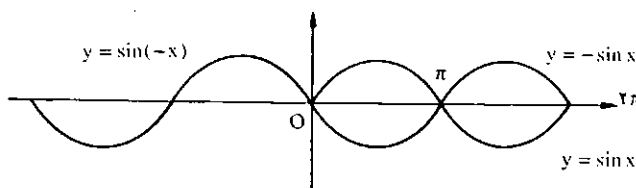


۴ - رسم تابع به معادله $y_F = |f(x)|$

اگر نقطه $M_{y, x}^+$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد،
آنگاه نقطه $M_{y, x}^+$ روی منحنی تابع به معادله $y_F = |f(x)|$ است.

چنانچه منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور x ها باشد آنگاه نمودار تابع به معادله $y_F = |f(x)|$ نیز همان

مثال: نمودار تابع به معادله $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ معلوم است. می‌خواهیم نمودارهای دو تابع به معادلات $y_1 = -\sin x$ و $y_2 = \sin(-x)$ را رسم کنیم.

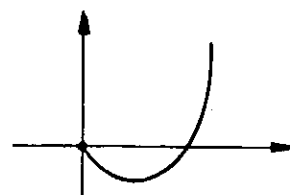


۳ - رسم تابع به معادله $y_F = f(|x|)$

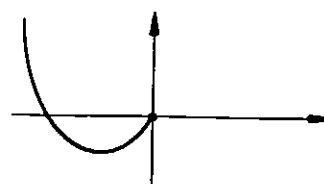
می‌دانیم $|x| = \begin{cases} +x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_F = f(x), & x \geq 0 \\ y_F = f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

پس برای رسم تابع به معادله $y_F = f(|x|)$ باید از نمودار تابع f قسمتی را انتخاب کرد، که $x \geq 0$ یعنی این قسمت:

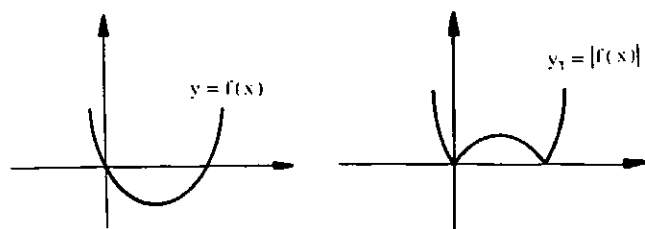
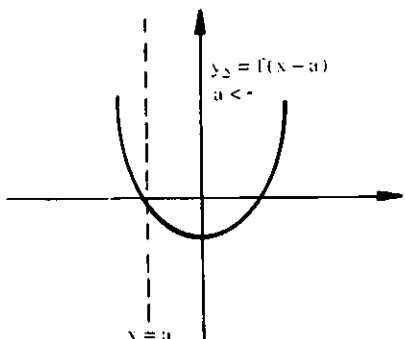
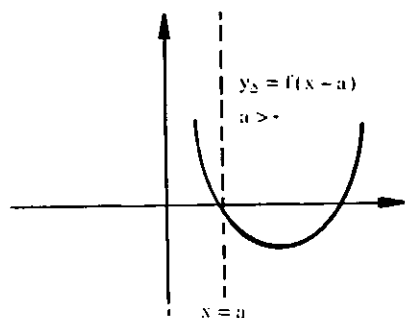


و از نمودار تابع به معادله $y_F = f(-x)$ باید قسمتی را انتخاب کرد که $x < 0$ یعنی این قسمت:



نمودار تابع f است.

و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور x ها باشد، برای رسم تابع به معادله $y_f = |f(x)|$ باید قرینه این قسمت از منحنی را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



۵ - رسم تابع به معادله $y_0 = f(x-a)$

اگر نقطه $M|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M|_{y_0}^{x_0+a}$ روی منحنی تابع به معادله $y_0 = f(x-a)$ است و بالعکس:

$$\text{اگر } M|_{y_0}^{x_0+a} \in y_0 \Rightarrow y_0 = f(x_0+a-a) \Rightarrow$$

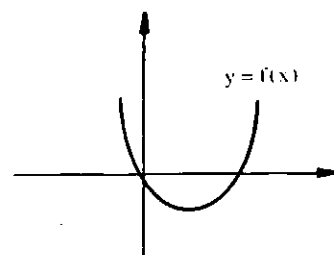
$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow M|_{y_0}^{x_0} \in f$$

پس می توان گفت هر نقطه به طول x_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله $y_0 = f(x-a)$ به نقطه ای به طول (x_0+a) تبدیل می شود.

به عبارت دیگر می توان گفت هر نقطه از منحنی تابع f با بردار انتقال $\vec{V}(a, 0)$ به نقطه ای از منحنی به معادله $y_0 = f(x-a)$ تبدیل می شود.

بنابراین برای رسم تابع به معادله $y_0 = f(x-a)$ کفایت کلیه نقاط منحنی تابع f را به اندازه $x = a$ در راستای محور x ها تغییر مکان می دهیم.

اگر $a > 0$ ، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت راست محور x ها انتقال می یابد و اگر $a < 0$ ، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت چپ محور x ها انتقال می یابد.



۶ - رسم تابع به معادله $y_f = b + f(x)$

اگر نقطه $M|_{y_f}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M|_{y_f}^{x_0+y_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y_f = b + f(x)$ است و بالعکس

$$\text{اگر } M|_{y_f}^{x_0+y_0} \in y_f \Rightarrow b+y_0 = b+f(x_0) \Rightarrow$$

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow M|_{y_0}^{x_0} \in f$$

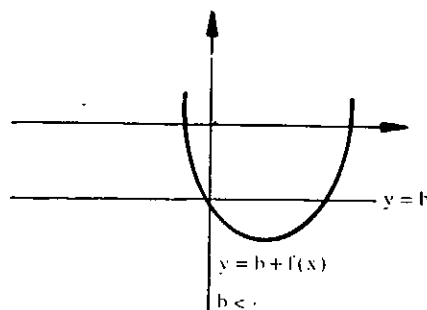
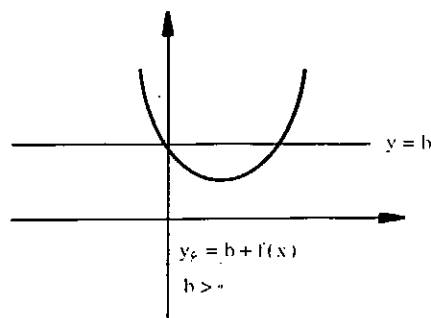
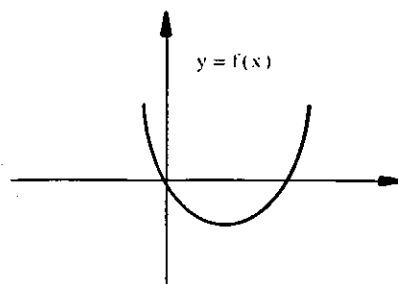
پس هر نقطه به عرض y_0 واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادله $y_f = b + f(x)$ به عرض $b+y_0$ تبدیل می شود.

به عبارت دیگر می توان گفت هر نقطه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ با بردار انتقال $\vec{V}(0, b)$ به نقطه ای از منحنی به معادله $y_f = b + f(x)$ تبدیل می شود.

در نتیجه برای رسم تابع به معادله $y_f = b + f(x)$ کفایت کلیه نقاط منحنی تابع f را به اندازه $y = b$ در راستای محور y ها تغییر مکان می دهیم.

اگر $b > 0$ ، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y = b$ به طرف بالای محور y ها انتقال می یابد و اگر $b < 0$ ، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y = b$ به طرف پائین محور y ها انتقال می یابد.

با بردار انتقال $\vec{V}(a, b)$ به نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y_v = b + f(x - a)$ تبدیل می‌شود.



۷ - رسم تابع به معادله $y_v = b + f(x - a)$

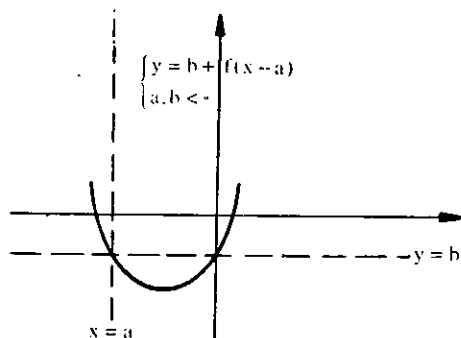
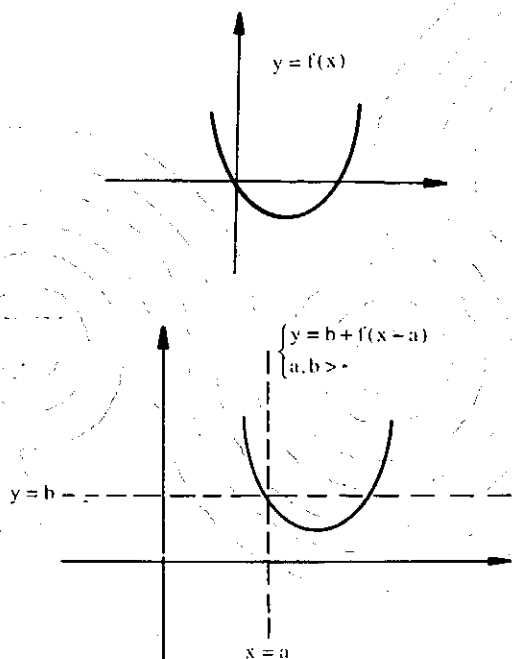
در حقیقت رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_v = b + f(x)$ و $y_v = f(x - a)$ است.

اگر نقطه $M|_{y_v}^{x_v}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه $M|_{y_v+h}^{x_v+a}$ روی منحنی تابع به معادله $y_v = b + f(x - a)$ واقع است و بالعکس.

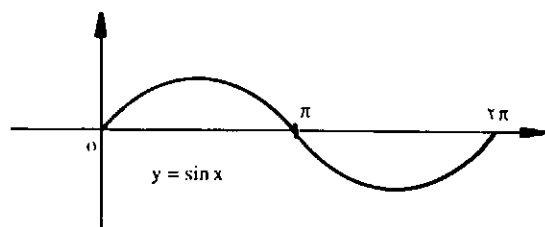
$$\text{اگر } M|_{y_v+h}^{x_v+a} \in y_v \Rightarrow y_v + b = b + f(x_v + a - a) \Rightarrow$$

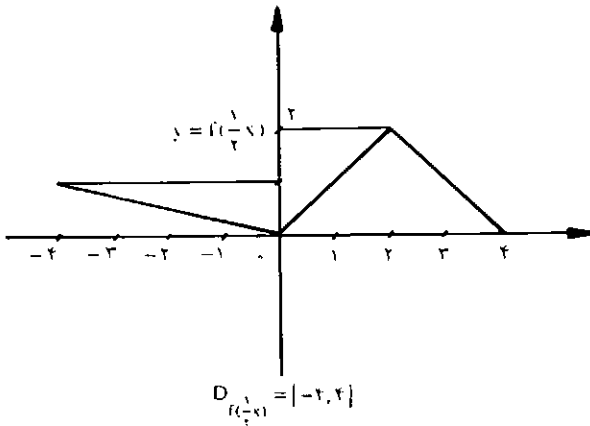
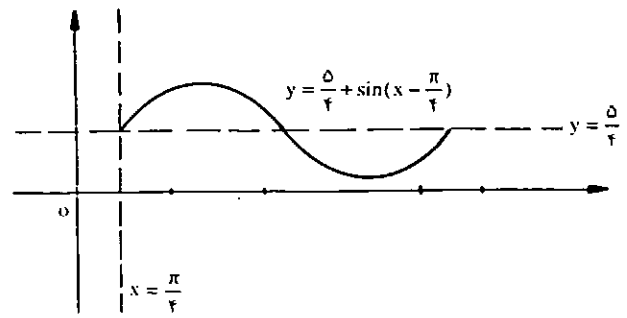
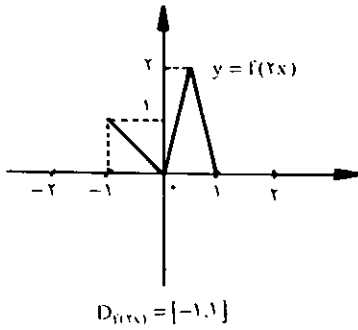
$$y_v = f(x_v) \Rightarrow M|_{y_v}^{x_v} \in f$$

بنابراین برای رسم نمودار تابع به معادله $y_v = b + f(x - a)$ ، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه a در راستای محور x ها و به اندازه b در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم. به عبارت دیگر هر نقطه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$



مثال: منحنی تابع به معادله $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ مفروض است. نمودار تابع به معادله $y = \frac{5}{4} + \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را رسم کنید.





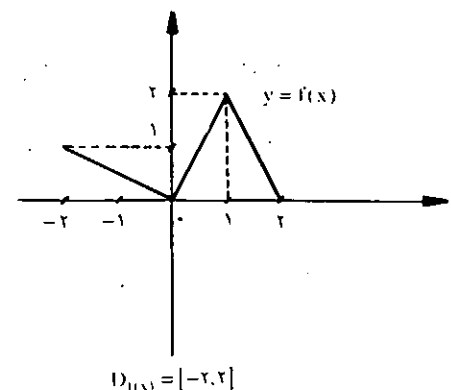
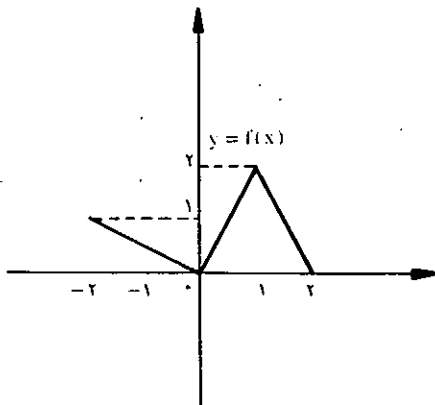
۹ - رسم نمودار تابع به معادله $y_9 = kf(x)$

اگر نقطه $M|_{y_9}^{x_9}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد،
آنگاه نقطه $M'|_{ky_9}^{x_9}$ روی منحنی تابع به معادله $y_9 = kf(x)$ است. و بالعکس:

$$\text{اگر } M'|_{ky_9}^{x_9} \in y_9 \Rightarrow ky_9 = kf(x_9) \Rightarrow y_9 = f(x_9) \Rightarrow$$

$$M|_{y_9}^{x_9} \in f$$

پس برای رسم تابع به معادله $y_9 = kf(x)$ باید عرض هر
نقطه از منحنی تابع f را (با حفظ طول آن) در عدد k ضرب
کنیم.



۸ - رسم تابع به معادله $y_8 = f(kx)$
اگر نقطه $M|_{y_8}^{x_8}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه
روی منحنی تابع به معادله $y_8 = f(kx)$ است و بالعکس

$$\text{اگر } M'|_{ky_8}^{x_8} \in y_8 \Rightarrow y_8 = f(k \times \frac{x_8}{k}) \Rightarrow y_8 = f(x_8) \Rightarrow$$

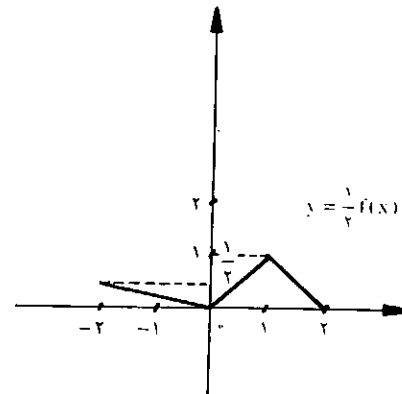
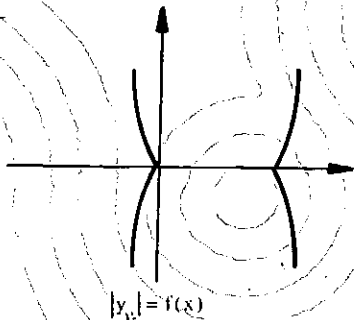
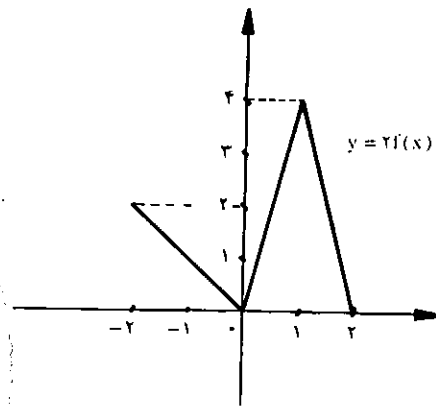
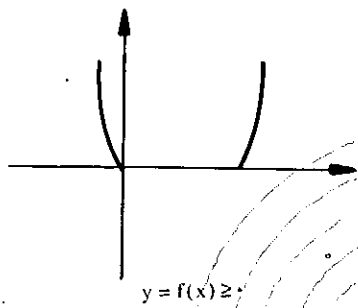
$$M|_{y_8}^{x_8} \in f$$

بنابراین برای رسم تابع به معادله $y_8 = f(kx)$ باید طول
هر نقطه از منحنی f را (با حفظ مقدار عرض آن) بر عدد k
تقسیم کنیم.

یعنی اگر $k = 2$ ، آنگاه نقطه $M|_{y_8}^{x_8}$ از منحنی تابع f به
نقطه $M'|_{ky_8}^{x_8}$ و اگر $k = \frac{1}{2}$ آنگاه نقطه $M|_{y_8}^{x_8}$ از منحنی تابع f به
نقطه $M'|_{ky_8}^{x_8}$ تبدیل می شود.

چنانچه حوزه تعریف تابع f فاصله $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد،

آنگاه حوزه تعریف تابع به معادله $y_8 = f(kx)$ فاصله
 $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}] \subset \mathbb{R}$ خواهد شد.



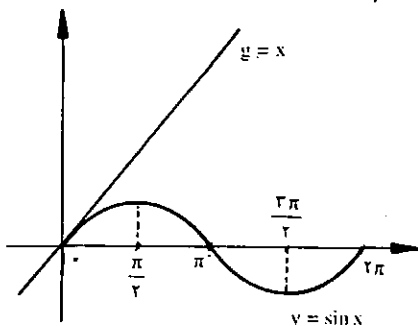
۱۱ - رسم تابع $f+g$

فرض می‌کنیم $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و اگر نقطه‌ای به طول x روی منحنی f و روی منحنی g باشد داریم:

نقطه $M_1|_{f(x)}$ روی منحنی f و نقطه $M_2|_{g(x)}$ روی منحنی g است در نتیجه نقطه $M|_{f(x)+g(x)}$ روی منحنی $f+g$ است. پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x) + g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای تقاطع هم طول روی دو منحنی f و g را با هم جمع کرد.

مثال منحنی نمایش تابع به معادله $y = x + \sin x$ را وقتی $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

توجه: اگر $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow M|_{\frac{\pi}{2} + 1}$

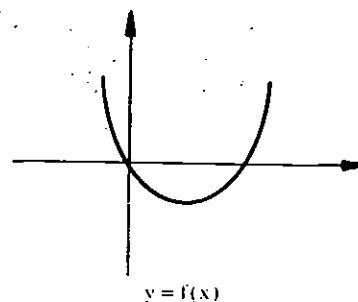


۱۰ - نمودار رابطه $|y_1| = f(x)$

اولاً: $f(x) \geq 0$ یعنی از منحنی تابع f باید قسمتهایی را انتخاب کرد که روی محور x ها یا بالای محور x هاست، از طرفی:

$$|y_1| = f(x) \Rightarrow y_1 = \pm f(x)$$

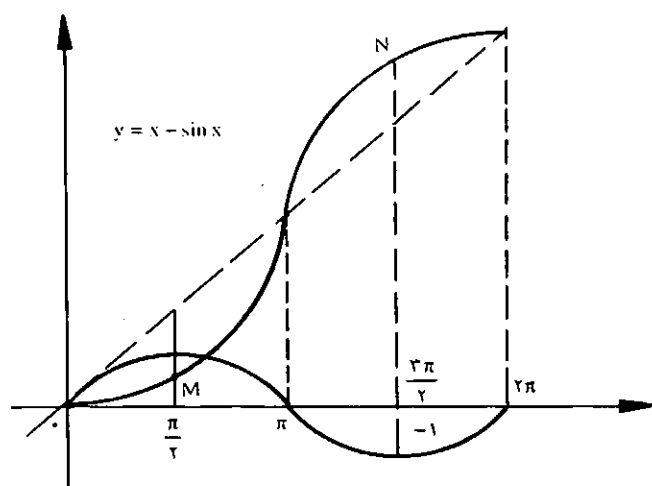
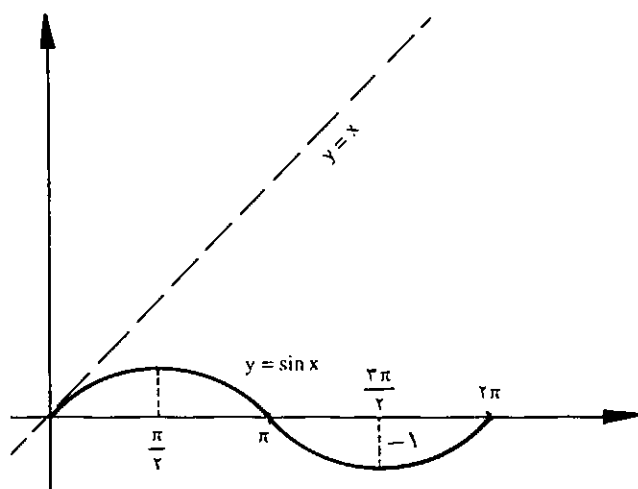
ثانیاً: باید قرینه همین قسمت از منحنی f که روی محور x ها یا بالای محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها هم رسم کنیم.



منحنی تابع g است در نتیجه نقطه $M|_{f(x_i)-g(x_i)}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ قرار دارد.

پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای نقاط هم طول روی دو منحنی f و g را از هم کم کرد.

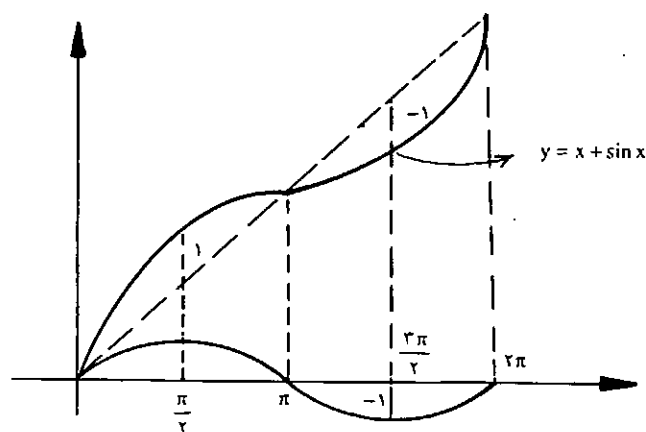
مثال: منحنی نمایش تابع به معادله $y = x - \sin x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ را رسم کنید.



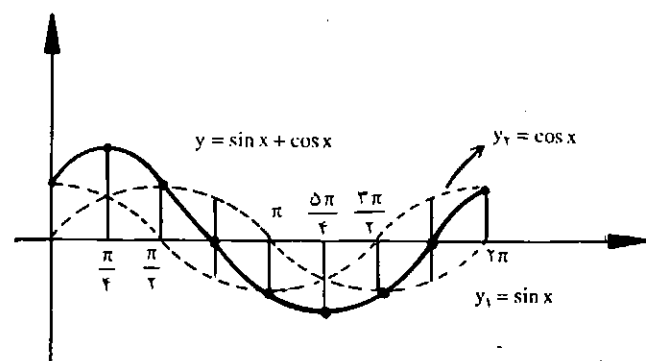
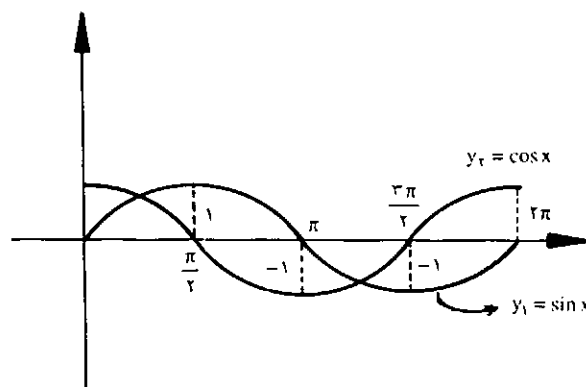
توجه:

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow M \left| \frac{\pi}{2} - 1 \right.$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 1 \Rightarrow N \left| \frac{3\pi}{2} + 1 \right.$$



مثال: با در دست داشتن منحنی های به معادله $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ و $0 \leq x \leq \pi$ آنگاه منحنی تابع به معادله $y = \sin x + \cos x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ را رسم کنید.



۱۲ - رسم تابع $f - g$

فرض می کنیم $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و اگر نقطه ای به طول x روی منحنی های تابع های $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ باشد داریم: نقطه $M_1|_{f(x_i)}$ روی منحنی تابع f و نقطه $M_2|_{g(x_i)}$ روی